FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ing. dell'Energia – Ing. Meccanica (Canali 2, 3)

Docenti: C. Bertolin, L. Fiorot, L. Martini

II appello 2023/24
Data: 09/02/2024
Tema: A

Regole d'esame. Durata: **1 ora e 30 minuti.** È *vietato* l'utilizzo di appunti e supporti elettronici. Mantenere il telefono **spento** per tutta la durata dell'esame. Mostrare i passaggi e **cerchiare** le risposte.

- ***ESERCIZIO 1.*** Fissato in $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare standard, si consideri il sottospazio di $\mathbb{R}^4$

$$U : \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

1. Calcolare le dimensioni dei sottospazi $U, U^\perp, U \cap U^\perp, U + U^\perp$. (3 pti)
2. Determinare una base di $U^\perp$. (1 pti)
3. Trovare una base ortonormale di U. (2 pti)
4. Dato

$$W : \begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Determinare una base di $U \cap W$ ed equazione cartesiana per $U + W$. (2 pti)

- ***SOLUZIONE 1.***

1. $\dim U = \dim U^\perp = 2, \dim(U \cap U^\perp) = 0, \dim(U + U^\perp) = 4.$
2. Una base di $U^\perp$ è $\{(1, 0, -1, -1), (0, 1, 3, 1)\}$.
3. Una base ortonormale di U è $\{\frac{1}{\sqrt{11}}(1, -3, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{102}}(7, 1, -4, -6)\}$.
4. $B_{U\cap W} = \{(2, -4, 1, 1)\}$ equazione cartesiana di $U + W : x_1 - x_3 - x_4 = 0$.

- ***ESERCIZIO 2.*** Si consideri l'applicazione lineare

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(a) Determinare la matrice A associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Determinare la dimensione ed una base di $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$. (2 pti)

(c) Si dica se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. (1 pti)

(d) Si dica se $A^2 = A \cdot A$ è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. In caso affermativo determinare una matrice diagonale D che sia simile ad A^2. (2 pti)

(voltare pagina)

- ***SOLUZIONE 2.***

(a) La matrice di f nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Poiché una forma a scala di A è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

l'applicazione lineare f è un isomorfismo, quindi ha nucleo banale e la sua immagine ha come base le colonne di A.

(c) Il polinomio caratteristico di A è

$$\begin{aligned} \det(A - x\mathbf{1}_3) &= \det \begin{pmatrix} 1-x & 1 & -1 \\ -1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{pmatrix} \\ &= (1-x)(x^2-1) - (x-1) - (-1+x) \\ &= (1-x)(x^2-1) - 2(x-1) = -(x-1)[(x^2-1)+2] \\ &= -(x-1)(x^2+1). \end{aligned}$$

Poiché $x^2 + 1$ non è fattorizzabile su $\mathbb{R}$ nel prodotto di polinomi di primo grado, A non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

(d) Si ha

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dunque il polinomio caratteristico di A^2 è

$$\begin{aligned} \det(A^2 - x\mathbf{1}_3) &= \det \begin{pmatrix} -1-x & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ 0 & 1 & -x \end{pmatrix} \\ &= -(1+x)(x^2-1) \\ &= -(x+1)^2(x-1). \end{aligned}$$

Gli autovalori di A^2 sono quindi $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$, con molteplicità algebriche uguali rispettivamente a due ed uno. Quindi, A^2 è diagonalizzabile se e solo se $m_g(\lambda_1) = m_g(-1) = 2$. Poiché

$$\mathrm{rk}(A^2 + \mathbf{1}_3) = \mathrm{rk} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

la condizione è evidentemente verificata, quindi A^2 è diagonalizzabile ed è simile a $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- ***ESERCIZIO 3.*** Siamo r ed s due rette nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ di equazione parametriche

$$r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 1 + u \\ y = -2 \\ z = 3 - u \end{cases}$$

con $t, u \in \mathbb{R}$.

1. Verificare che le due rette r ed s sono sghembe. (1 pti)
2. Determinare i punti di minima distanza tra r ed s ed equazioni cartesiane della retta passante per questi punti. (2 pti)
3. Calcolare la distanza fra r ed s. (2 pti)

- ***SOLUZIONE 3.***

1. I vettori direttori di r ed s non sono paralleli. Inoltre $r \cap s$ è vuoto. Dunque le rette sono sghembe.
2. La retta cercata ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

3. $d(r, s) = \frac{5}{3}\sqrt{3}$.

- ***TEORIA***

(a) Enunciare e dimostrare il teorema di diagonalizzabilità di un endomorfismo. (3 pti)

(b) Dimostrare che il nucleo di un'applicazione lineare è un sottospazio vettoriale. (3 pti)