Analisi Matematica 2B

Nome, cognome, matricola:

Scritto del 14/9/2023

Esercizio 1 (10 punti) In $\mathbb{R}^2$ si consideri la forma differenziale

$$\omega = y^2(x-y)dx + x^2(x+y)dy.$$

i) Stabilire se ω è esatta su $\mathbb{R}^2$ ed eventualmente calcolarne un potenziale.

ii) Calcolare l'integrale

$$I = \int_\gamma \omega,$$

dove $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ è la circonferenza $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ per $t \in [0, 2\pi]$. Sugg.: Teorema della divergenza.

Risposte: i) ω esatta si/no no ii) $I = + \frac{3}{2}\pi$

Esercizio 2 (10 punti) Consideriamo il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2y^2 - z^4 = 0\}.$$

i) Determinare il piú piccolo insieme chiuso $C \subset \mathbb{R}^3$ tale che $M \setminus C$ sia una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^3$.

ii) Per $R > 0$ si consideri la porzione di insieme

$$M_R = \{(x, y, z) \in M : |x| < R, |y| < R\}.$$

Calcolare l'area $\mathscr{H}^2(M_R)$.

Risposte: i) $C = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}$ ii) $\mathscr{H}^2(M_R) = 32/3 \cdot \sqrt{2}\, R^2$

Esercizio 3 (10 punti) Sia $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ la circonferenza unitaria e per $\alpha \geq 0$ si consideri l'integrale

$$I_\alpha = \int_S \frac{x(x-\alpha) + y^2}{(x-\alpha)^2 + y^2} d\mathscr{H}^1.$$

i) Calcolare I_α per $\alpha = 1$.

ii) Calcolare I_α per $\alpha > 1$.

iii) (Facoltativo) Verificare che $I_\alpha = 2\pi$ per $\alpha \in [0, 1)$.

Risposte: i) $I_1 = \pi$ ii) $I_\alpha = 0$ per $\alpha > 1$

2 ore e 30 minuti a disposizione