Analisi Matematica 2B

Nome, cognome, matricola: Scritto del 14/7/2023

Esercizio 1 (8 punti) Siano $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| + |y| < 1\}$ ed $f : A \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{|x|+|y|}}, \qquad (x,y) \in A.$$

Calcolare l'integrale

$$I = \int_A f(x,y)dxdy.$$

Risposta: $I =$

Esercizio 2 (12 punti) Sia $n \geq 2$. Per $v \in \mathbb{R}^n$ con $|v| = 1$, ovvero $v \in \mathbb{S}^{n-1}$, si consideri l'insieme

$$\Sigma_v = \big\{x \in \mathbb{R}^n : |x|^2 - \log(1+|x|^2) - \langle x, v\rangle = 1\big\}.$$

i) Stabilire se Σ_v è una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^n$.

ii) Provare che esistono

$$m_v = \min\{|x| : x \in \Sigma_v\},$$
$$M_v = \overset{\max}{\cancel{\min}}\{|x| : x \in \Sigma_v\}.$$

Stabilire se m_v ed M_v dipendono da $v \in \mathbb{S}^{n-1}$.

iii) Determinare m_v ed M_v (non si calcolano in modo esplicito).

Risposte: i) Σ_v sottovarietà si/no	ii) dipendono da $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ si/no

Esercizio 3 (10 punti) Sia $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ la circonferenza unitaria, e per $\alpha \geq 0$ si consideri l'integrale

$$I_\alpha = \int_S \frac{x(x-\alpha)+y^2}{(x-\alpha)^2+y^2} d\mathscr{H}^1.$$

i) Calcolare I_α per $\alpha = 1$.

ii) Calcolare I_α per $\alpha > 1$.

iii) (Facoltativo) Verificare che $I_\alpha = 2\pi$ per $\alpha \in [0,1)$.

Risposte: i) $I_1 =$	ii) $I_\alpha =$	per $\alpha > 1$

2 ore e 30 minuti a disposizione

Esercizio Siano $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| + |y| < 1 \}$ ed $f : A \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{|x| + |y|}}, \qquad (x,y) \in A.$$

Calcolare l'integrale

$$I = \int_A f(x,y)\, dx dy.$$

Risoluzione. La f è continua e positiva su A. L'integrale è ben definito. Per simmetria e con Fubini-Tonelli si trova:

$$I = 4 \int_{\{x+y<1,\ x>0 \text{ e } y>0\}} \frac{1}{\sqrt{x+y}}\, dx dy$$

$$= 4 \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{\sqrt{x+y}}\, dy dx$$

$$= 4 \int_0^1 \left[2 (x+y)^{\frac{1}{2}} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx$$

$$= 8 \int_0^1 \left\{ 1 - x^{1/2} \right\} dx = 8 - 8 \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= 8 - 8 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3}.$$

Soluzione alternativa con integrazione per sopralivelli:

$$I = \int_0^{\infty} \mathcal{L}^2(\{(x,y)\in A : f(x,y) > t\})\, dt$$

$$= \int_0^1 \mathcal{L}^2(A)\, dt + \int_1^{+\infty} \mathcal{L}^2(\{|x|+|y| < \tfrac{1}{t^2}\})\, dt$$

$$= \mathcal{L}^2(A) + \int_1^{\infty} \frac{1}{t^4} \mathcal{L}^2(A)\, dt$$

$$= 2 + 2\left[-\frac{1}{3} t^{-3}\right]_{t=1}^{t=\infty} = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}.$$

$\square$

Esercizio Sia $n \geq 2$. Per $v \in S^{n-1}$ - ovvero $v \in \mathbb{R}^n$ con $|v| = 1$ - si consideri

$$\Sigma_v = \{ x \in \mathbb{R}^n ; \ |x|^2 - \log(1+|x|^2) - \langle x, v \rangle = 1 \}.$$

i) Stabilire se Σ_v è una sottovarietà di $\mathbb{R}^n$.

ii) Provare che esistono

$$m_v = \min \{ |x| \ ; \ x \in \Sigma_v \}$$

$$M_v = \max \{ |x| \ ; \ x \in \Sigma_v \}.$$

È vero che m_v ed M_v sono indipendenti da $v \in S^{n-1}$?

iii) Caratterizzare m_v ed M_v. Suggerimento: non si calcolano in modo esplicito, ridursi allo studio dell'equazione $t^2 - \log(1+t^2) - t = 1$, con $t \in \mathbb{R}$.

Risoluzione. i) Una funzione definiente per Σ_v è

$$f(x) = |x|^2 - \log(1+|x|^2) - \langle x, v \rangle,$$

suo gradiente:

$$\nabla f(x) = 2x - \frac{2x}{1+|x|^2} - v$$

Il sistema di equazioni $\nabla f(x) = 0$ implica che x è parallelo a v, ovvero $x = tv$ per $t \in \mathbb{R}$.
Siccome $0 \notin \Sigma_v$ sarà $t \neq 0$ e inoltre

$$2t - \frac{2t}{1+t^2} = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$2t\left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) = 1 \iff \frac{2t^3}{1+t^2} = 1.$$

La derivata di $\phi(t) = \dfrac{2t^3}{1+t^2}$ è

$$\phi'(t) = \frac{6t^2(1+t^2) - 2t^3 \cdot 2t}{(1+t^2)^2} = \frac{2t^4 + 6t^2}{(1+t^2)^2} \geq 0.$$

Quindi $\phi(t) = 1$ ha l'unica soluzione $t=1$.

Vediamo se $x = v$ appartiene ad M:

$$f(v) = |v|^2 - \log(1+|v|^2) - |v|^2 = -\log 2 \neq 1$$

Dunque $v \notin M$.

Poiché $\nabla f(x) \neq 0$ per ogni $x \in \Sigma_v$ segue che Σ_v è una ipersuperficie.

ii) Certamente $\Sigma_v \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme chiuso.

Siccome

$$\lim_{|x| \to \infty} \frac{f(x)}{|x|^2} = 1$$

esiste $C \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \geq \frac{1}{2}|x|^2 - C, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Per $x \in M$:

$$1 = f(x) \geq \frac{1}{2}|x|^2 - C \qquad \Rightarrow \qquad |x| \leq \sqrt{2(1+C)}.$$

Quindi Σ_v è limitato. Per Heine-Borel, $\Sigma_v \in \mathbb{R}^n$ è un insieme compatto, quindi m_v e M_v esistono per il Teorema di Weierstrass.

Sia $T \in O(n)$ una trasformazione ortogonale.

Allora

$$\Sigma_{Tv} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x|^2 - \log(1+|x|^2) - \langle T^{-1}x, v\rangle = 1\}$$

$$= \{T\xi \ :\ \xi \in \mathbb{R}^n \text{ e } |\xi|^2 - \log(1+|\xi|^2) - \langle \xi, v\rangle = 1\}$$

$$= T(\Sigma_v).$$

Siccome $|Tx| = |x|$ deduciamo che m_v e M_v non dipendono da $v \in S^{n-1}$.

iii) Siccome $\nabla |x| = \frac{x}{|x|}$, i punti di minimo/massimo vincolati su M verificano

$$\frac{x}{|x|} = \lambda \nabla f(x) \quad \text{per qualche } \lambda \in \mathbb{R},$$

ovvero

$$\frac{x}{|x|} = \lambda \left\{ 2x - \frac{2x}{1+|x|^2} - v \right\}.$$

Deve essere $x = tv$ per qualche $t \in \mathbb{R}$. Inserendo in $f(x) = 1$ si trova

$$\psi(t) := t^2 - \log(1+t^2) - t = 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Derivata di ψ:

$$\psi'(t) = 2t - \frac{2t}{1+t^2} - 1 = 2t\left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) - 1$$

$$= \frac{2t^3}{1+t^2} - 1 \geq 0 \iff t \geq 1$$

Dunque esistono $t_- < 0$ e $t_+ > 1$ tali che

$$\psi(t) = 0 \iff t \in \{t_-, t_+\}$$

Avremo $m = m_v = \min\{|t_-|, t_+\}$ e
$M = M_v = \max\{|t_-|, t_+\}$.

$\square$

Esercizio. Sia $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$ la circonferenza unitaria. Per $\alpha \geq 0$ si consideri l'integrale

$$I_\alpha = \int_S \frac{x(x-\alpha)+y^2}{(x-\alpha)^2+y^2} \, dH^1 .$$

i) Calcolare I_α per $\alpha = 1$;

ii) Calcolare I_α per $\alpha > 1$;

iii) Facoltativo: provare che $I_\alpha = 2\pi$ per $\alpha \in [0,1)$.

Risoluzione. i) Sia $S^+ = \{(x,y) \in S : y > 0\}$. Per simmetria:

$$I_1 = 2 \int_{S^+} \frac{x(x-1)+y^2}{(x-1)^2+y^2} \, dH^1 .$$

Abbiamo $y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$ con $\sqrt{1+f'(x)^2} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Per la formula della lunghezza

$$I_1 = 2 \int_{-1}^{+1} \frac{x(x-1)+1-x^2}{(x-1)^2+1-x^2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

$$= 2 \int_{-1}^{1} \frac{-x+1}{-2x+1+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \Big[\arcsin x\Big]_{x=-1}^{x=1}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi .$$

ii) La normale esterna ad S è $N = (x,y)$.

Dunque

$$\frac{x(x-\alpha)+y^2}{(x-\alpha)^2+y^2} = \left\langle \frac{(x-\alpha, y)}{(x-\alpha)^2+y^2}, N \right\rangle$$

Per $\alpha > 1$, il campo $F(x,y) = \dfrac{(x-\alpha, y)}{(x-\alpha)^2+y^2}$

è ben definito in tutto il disco $D = \{x^2+y^2<1\}$.

Per il Teorema della divergenza

$$I_\alpha = \int_D \operatorname{div} F(x,y)\, dx\,dy ,$$

Conti:

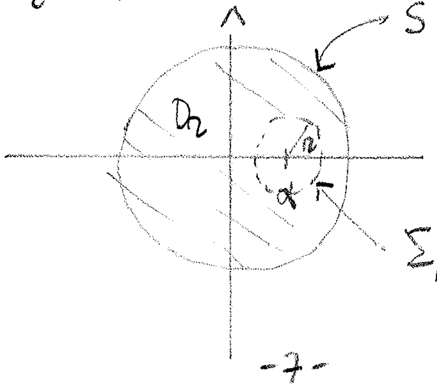
$$\operatorname{div} F = \left(\frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+y^2}\right)_x + \left(\frac{y}{(x-\alpha)^2+y^2}\right)_y$$

$$= \frac{(x-\alpha)^2+y^2-2(x-\alpha)^2}{[\ \dots\ ]^2} + \frac{(x-\alpha)^2+y^2-2y^2}{[\ \dots\ ]^2}$$

$$= 0$$

Quindi $I_\alpha = 0$ per $\alpha > 1$.

iii) Introduciamo un parametro $r>0$ piccolo e sia $D_r = \{(x,y) \in D;\ (x-\alpha)^2+y^2 > r^2\}$:



Σ_r = circonferenza centrata in $(\alpha,0)$ di raggio $r>0$ piccolo.

La normale esterna a ∂D_r nei punti di Σ_r è

$$N_{\Sigma_r} = - \frac{(x-\alpha, y)}{\sqrt{(x-\alpha)^2+y^2}} .$$

Per il Teorema della divergenza

$$0 = \int_{D_r} \underset{\substack{\parallel \\ 0 \\ \text{su } D_r}}{\operatorname{div} F(x,y)}\, dx dy = \underbrace{\int_S \langle F, (x,y) \rangle \, dH^1}_{= I_\alpha} -$$

$$- \int_{\Sigma_r} \langle F, \frac{(x-\alpha, y)}{\sqrt{(x-\alpha)^2+y^2}} \rangle \, dH^1 .$$

Quindi per $\alpha \in [0,1)$ si ha:

$$I_\alpha = \int_{\Sigma_r} \left\langle \frac{(x-\alpha, y)}{(x-\alpha)^2+y^2} , \frac{(x-\alpha, y)}{\sqrt{(x-\alpha)^2+y^2}} \right\rangle dH^1$$

$$= \frac{r^2}{r^2 \cdot r} \int_{\Sigma_r} 1 \, dH^1 = \frac{1}{r} H^1(\Sigma_r) = 2\pi ,$$

(non dipende da $r>0$ piccolo)

Dunque $I_\alpha = 2\pi$ per $\alpha \in [0,1)$.

$\square$