Fondamenti di algebra lineare e geometria

Corso di Laurea in Ingegneria dell'Energia (Canale B)

Lorenzo Martini

Università degli Studi di Padova

A.A. 2023-2024

Lezione 9

Richiamo della lezione precedente

- Definizione di spazio vettoriale sopra un campo.
- Esempi e proprietà.

Combinazioni lineari

In ogni spazio vettoriale V possiamo formare somme finite di multipli scalari di suoi vettori. Queste somme, grazie agli assiomi di spazio vettoriale, sono vettori di V, e sostanzialmente sono il risultato di tutte e sole le operazioni algebriche consentite in V.

Definizione

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Si chiama combinazione lineare a coefficienti in $\mathbb{K}$ ogni espressione in V del tipo

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n,$$

al variare di $n \in \mathbb{N}$, $v_i \in V$ e $\lambda_i \in \mathbb{K}$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.
In particolare, se i vettori $v_1, \ldots, v_n$ sono fissati, allora il vettore di sopra è detto combinazione lineare dei $v_1, \ldots, v_n$, o anche dell'insieme $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Si osservi nuovamente che combinazioni lineari sono somme finite di vettori.

Indipendenza e dipendenza lineari

Dato un qualsiasi insieme di vettori $\{v_1, \ldots, v_n\}$ in V, possiamo considerare l'equazione

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n = \vec{0}$$

nelle incognite $x_1, \ldots, x_n$.

Definizione

I vettori $v_1, \ldots, v_n \in V$ si dicono:

- linearmente indipendenti se l'unica soluzione in $\mathbb{K}^n$ della precedente equazione è lo zero di $\mathbb{K}^n$; cioè, se l'unico modo di scrivere lo zero $\vec{0}$ di V come combinazione lineare dei vettori $v_1, \ldots, v_n$ è quello di prendere i coefficienti x_i tutti nulli.
- linearmente dipendenti in caso contrario, cioè se è possibile scrivere $\vec{0}$ come combinazione lineare non banale dei vettori $v_1, \ldots, v_n$.

Se i vettori $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente dipendenti, allora ogni uguaglianza $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \vec{0}$ in V, dove almeno uno scalare λ_i è non nullo, verrà chiamata espressione di dipendenza lineare per i vettori.

Indipendenza e dipendenza lineari

Questo perché, supponendo ad esempio $\lambda_1 \neq 0$, da tale espressione possiamo esplicitare v_1 come combinazione lineare dei vettori $v_2, \ldots, v_n$, poiché vale

$$v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\, v_2 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\, v_n \ .$$

In definitiva, se n vettori sono linearmente dipendenti, allora uno di essi sarà combinazione lineare (non banale) degli altri $n-1$.

Definizione

Dati n vettori $v_1, \ldots, v_n$ in V, l'insieme di tutte le loro combinazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{K}$ sarà indicato come

$$\langle v_1, \ldots, v_n \rangle := \{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \mid n \in \mathbb{N},\ \lambda_i \in \mathbb{K}\ \forall i = 1, \ldots, n \} \ .$$

Osservazione (Importante)

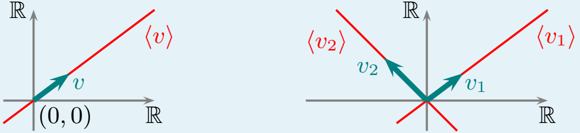
Siamo nelle condizioni di poter interpretare sia algebricamente che geometricamente il concetto di (in)dipendenza lineare per uno o due vettori di V.

Indipendenza e dipendenza lineari

Il punto cruciale è di prendere come esempio gli spazi vettoriali di $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$. Infatti, per tali insiemi,

- $\langle v \rangle$ consiste dei multipli scalari del vettore geometrico v, quindi è la retta avente direzione v;
- $\langle v_1, v_2 \rangle$ è il piano generato dai vettori geometrici v_1, v_2, cioè dalle rette $\langle v_1 \rangle$ e $\langle v_2 \rangle$. Questo degenera in una delle due rette se un vettore giace sulla retta dell'altro. In caso contrario, per il solo caso di $\mathbb{R}^2$, abbiamo l'uguaglianza insiemistica

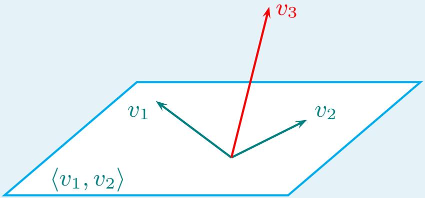
$$\langle v_1, v_2 \rangle = \mathbb{R}^2 .$$



L'uguaglianza insiemistica $\langle v_1, v_2 \rangle = \mathbb{R}^2$ data da due vettori non multipli di $\mathbb{R}^2$ ci dice che ogni vettore di $\mathbb{R}^2$ si può esprimere come un'opportuna combinazione lineare dei vettori v_1, v_2.

Indipendenza e dipendenza lineari

Non è mai possibile ottenere una simile uguaglianza con soli due vettori di $\mathbb{R}^3$ (che pure non siano multipli). Questo perché, intuitivamente, con loro combinazioni lineari non possiamo "uscire" dal piano che individuano.



Ebbene, in generale:

- Un vettore $v \in V$ è linearmente indipendente se e solo se $v \neq \vec{0}$, se e solo se $\langle v \rangle \neq \{\vec{0}\}$. La prima equivalenza segue dalla proprietà (iv) dell'ultimo lemma; la seconda è l'interpretazione geometrica dell'indipendenza lineare di un singolo vettore.
- Due vettori $v_1, v_2 \in V$ sono linearmente indipendenti se e solo se $v_1 \neq \lambda v_2$ per ogni $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, se e solo se $\langle v_1 \rangle \neq \langle v_2 \rangle$.

Esempio

(1) Verifichiamo se i tre vettori $v_1 = (3, 0, -1)^T$, $v_2 = (-2, 1, 0)^T$ e $v_3 = (-3, 2, 1)^T$ di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti. Dobbiamo risolvere in $\mathbb{R}^3$ l'equazione $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = (0, 0, 0)^T$ nelle incognite $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e pertanto risolvere il sistema

$$\begin{cases} 3\lambda_1 - 2\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ \qquad\quad \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 \qquad\quad + \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

È subito visto che l'unica soluzione è $(0, 0, 0)$, dunque v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti.

(2) Nello spazio vettoriale reale $\mathcal{F}$ delle funzioni di $\mathbb{R}$ in sé, verifichiamo se i vettori $v_1 = \sin$, $v_2 = \cos$ e $v_3 = \exp$ sono linearmente indipendenti. Occorre risolvere in $\mathbb{R}^3$ l'equazione

$$\lambda_1 \sin + \lambda_2 \cos + \lambda_3 \exp = \vec{0}$$

di $\mathcal{F}$, cioè l'equazione

Indipendenza e dipendenza lineari

$$\lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \cos(x) + \lambda_3 e^x = 0$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$, nelle incognite $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Dato che $\sin$ e $\cos$ sono funzioni limitate, e dato che $e^x \to +\infty$ per $x \to +\infty$, vediamo subito che deve essere $\lambda_3 = 0$. Ciò detto, dovendo valere $\lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \cos(x) = 0$ per ogni x, in particolare l'identità si avrà per $x = 0$, da cui $\lambda_2 = 0$. Infine, dovendo valere $\lambda_1 \sin(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, per $x = 0$ otteniamo $\lambda_1 = 0$, quindi v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti.

(3) I polinomi $p_1(x) = x + 2$, $p_2(x) = x^2 + 1$ e $p_3(x) = x^2 + x$ sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}[x]$, poiché il sistema lineare

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 & = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 & = 0, \end{cases}$$

ottenuto uguagliando a zero i coefficienti del polinomio $\lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x)$, ha come unica soluzione $(0, 0, 0)$.

Sottospazi vettoriali

Definizione

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Un sottoinsieme non vuoto $U \subseteq V$ è detto sottospazio vettoriale di V se U è spazio vettoriale rispetto alle operazioni di V (ristrette ad U).

In altre parole, $\emptyset \neq U \subseteq V$ è sottospazio vettoriale se e solo se

(i) dati $u_1, u_2 \in U$, allora $u_1 + u_2 \in U$;

(ii) dati $u \in U$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, allora $\lambda u \in U$;

se, e solo se, $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in U$ per ogni $u_1, u_2 \in U$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$.

Osservazione

- Per definizione, ogni sottospazio vettoriale U di V è non vuoto; pertanto, possiamo considerare un elemento $u \in U$. Essendo U uno spazio vettoriale, grazie ad A4 esiste, in U, l'opposto $-u$, e la somma $u - u = \vec{0}$ appartiene a sua volta ad U. In definitiva, ogni sottospazio vettoriale contiene lo zero $\vec{0}$ di V; in particolare, $\{\vec{0}\}$ è sempre sottospazio di V.

Sottospazi vettoriali

- Tutti i sottoinsiemi del tipo $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ sono sottospazi vettoriali di V. Questo perché, in forza delle proprietà associativa e distributive, combinazioni lineari di combinazioni lineari sono combinazioni lineari.
- Il sottoinsieme $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y\}$ di $\mathbb{R}^2$ non è sottospazio vettoriale di quest'ultimo. Infatti, sebbene W contenga $\vec{0} = (0, 0)$, non è chiuso per le somme (vedi figura).