Fondamenti di algebra lineare e geometria

Corso di Laurea in Ingegneria dell'Energia (Canale B)

Lorenzo Martini

Università degli Studi di Padova

A.A. 2023-2024

Lezione 7

Richiamo della lezione precedente

- Calcolo matriciale.
- Matrici invertibili.
- Matrice trasposta.

Matrici e sistemi lineari

Nella lezione di oggi concluderemo la trattazione dei sistemi lineari, in particolare del metodo di eliminazione di Gauss, soffermandoci ulteriormente sul ruolo che hanno le matrici in merito.

Introduciamo le seguenti matrici $E_{ij} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, definite ponendo

$$(E_{ij})_{hk} := \begin{cases} 1 & \text{se } (h,k) = (i,j), \\ 0 & \text{se } (h,k) \neq (i,j). \end{cases}$$

Quindi E_{ij} ha entrate nulle tranne nella (i,j)-esima dove c'è 1 (ricordiamo che l'uguaglianza tra coppie ordinate è quella data dall'uguaglianza coordinata per coordinata).

Osservazione

Le matrici E_{ij} sono molto utili per decomporre additivamente una matrice arbitraria $A = (a_{ij})$: osserviamo infatti che vale

$$A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij} \ .$$

Matrici elementari

Sfruttiamo le matrici E_{ij} per introdurre la seguente classe di matrici.

Definizione

In $M_n(\mathbb{R})$ definiamo le matrici elementari come segue:

- $\Sigma(i,j) := \mathbb{1}_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$, per ogni $1 \leq i \neq j \leq n$;
- $\Lambda(i;\lambda) := \mathbb{1}_n + (\lambda - 1)E_{ii}$, per ogni $i = 1, \ldots, n$ e $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- $\Xi(i,j;\lambda) := \mathbb{1}_n + \lambda E_{ij}$, per ogni $1 \leq i \neq j \leq n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

In altre parole,

- $\Sigma(i,j)$ ha entrate unitarie lungo la diagonale principale—ad accezione delle (i,i)- e (j,j)-esima—ed in posizioni (i,j)- e (j,i)-esima; altrove le entrate sono nulle.
- $\Lambda(i;\lambda)$ ha entrate unitarie lungo la diagonale principale—ad eccezione della (i,i)-esima dove c'è $\lambda \neq 0$;
- $\Xi(i,j;\lambda)$ è la matrice identità con l'aggiunta dell'entrata λ in (i,j)-esima posizione.

Matrici elementari

Esplicitamente:

$$\Sigma(i,j) = \left(\begin{array}{c|ccc|c} \mathbb{1}_{i-1} & & 0 & & 0 \\ \hline & 0 & & 1 & \\ 0 & & \mathbb{1}_{j-i-1} & & 0 \\ & 1 & & 0 & \\ \hline 0 & & 0 & & \mathbb{1}_{n-j} \end{array}\right),$$

$$\Lambda(i;\lambda) = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbb{1}_{i-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathbb{1}_{n-i} \end{array}\right),$$

$$\Xi(i,j;\lambda) = \left(\begin{array}{c|ccc|c} \mathbb{1}_{i-1} & & 0 & & 0 \\ \hline & 1 & & \lambda & \\ 0 & & \mathbb{1}_{j-i-1} & & 0 \\ & 0 & & 1 & \\ \hline 0 & & 0 & & \mathbb{1}_{n-j} \end{array}\right).$$

Come al solito, 0 denota lo zero di $\mathbb{R}$ od una opportuna matrice ad entrate nulle.

Matrici elementari

Un calcolo diretto (esercizio) prova i seguenti fatti.

Lemma

Le matrici elementari sono invertibili: per tutti gli opportuni indici i, j e numeri $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, si ha

$$\begin{aligned} \Sigma(i,j)^{-1} &= \Sigma(i,j), \\ \Lambda(i;\alpha)^{-1} &= \Lambda(i;1/\alpha), \\ \Xi(i,j;\lambda)^{-1} &= \Xi(i,j;-\lambda) \ . \end{aligned}$$

In particolare, l'inversa di una matrice elementare è elementare.

Il nome "elementare" dato alle precedenti matrici è motivato dal seguente fatto, che sancisce che pre-moltiplicare una qualsiasi matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ per una matrice elementare $m \times m$ corrisponde ad applicare una opportuna operazione elementare sulle righe di A.
In altre parole, siamo a formulare in termini matriciali le operazioni elementari sulle righe di una matrice.

Matrici elementari

Proposizione

Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Allora:

(i) $\Sigma(i,j)A$ è la matrice ottenuta da A scambiando riga i-esima con riga j-esima;

(ii) $\Lambda(i;\lambda)A$ è la matrice ottenuta da A moltiplicando riga i-esima per λ;

(iii) $\Xi(i,j;\lambda)A$ è la matrice ottenuta da A sommando alla riga i-esima la riga j-esima moltiplicata per λ.

Dimostrazione. Proviamo (iii) lasciando per esercizio le restanti affermazioni.

(iii) È evidente che la moltiplicazione a sinistra di A per $\Xi(i,j;\lambda)$ ha effetto solamente sulla riga i-esima del prodotto. In effetti, per ogni indice di colonna $k = 1, \ldots, n$ abbiamo

$$[\Xi(i,j;\lambda)A]_{ik} = \sum_{h=1}^{m} \Xi(i,j;\lambda)_{ih} a_{hk} = \overbrace{a_{ik} + \lambda a_{jk}}^{\Xi(i,j;\lambda)_{ii} a_{ik} + \Xi(i,j;\lambda)_{ij} + a_{jk}}\,. \qquad \square$$

Matrici elementari e forme a scala

In vista del precedente risultato, possiamo concludere che una forma a scala A' di $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ si ottiene pre-moltiplicando A per un opportuno prodotto di matrici elementari:

$$A' = B_t B_{t-1} \cdots B_2 B_1 \cdot A$$

dove le B_k sono matrici del tipo $\Sigma(i_k, j_k)$, $\Lambda(i_k; \lambda_k)$ o $\Xi(i_k, j_k; \lambda_k)$ per $k = 1, \ldots, t$ ed opportuni i_k, j_k, λ_k come sopra. In particolare, essendo ciascuna B_k una matrice $m \times m$ invertibile, allora l'intero prodotto $B_t B_{t-1} \cdots B_2 B_1$ è una matrice invertibile $m \times m$. In definitiva, abbiamo dimostrato il seguente:

Teorema

Ogni forma a scala A' di una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ si ottiene pre-moltiplicando A per una opportuna matrice invertibile $m \times m$:

$$A' = BA\,.$$

Matrici elementari e matrici invertibili

Il precedente teorema ha molteplici importanti applicazioni.

- Nel caso di matrici quadrate, da $A' = BA$ vediamo che se la nostra matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile, allora pure la sua forma a scala A' lo è (in quanto prodotto di matrici invertibili). Peraltro, abbiamo già osservato che A' deve avere n pivot, in particolare lungo la sua diagonale principale (vedi Osservazione Importante).
  Ciò premesso, è facile vedere che una matrice a scala con entrate diagonali non nulle può essere trasformata, sempre con operazioni elementari, in una matrice diagonale (cioè con sole entrate diagonali, in questo caso non nulle) e di lì nella matrice identità. È così provato il seguente:

Corollario

Una forma a scala di una matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ è $\mathbb{1}_n$.

In particolare, dato che abbiamo $\mathbb{1}_n = BA$, allora la matrice B è l'inversa di A.

Matrici in forma a scala e matrici invertibili

- In generale, vorremmo un metodo per determinare la matrice B del precedente teorema, cioè quel fattore che ci fornisce la forma a scala A' della nostra matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Ebbene, possiamo ricavare B applicando proprio il metodo di eliminazione di Gauss.
  Data A, formiamo il blocco $(A \mid \mathbb{1}_m) \in M_{m,n+m}(\mathbb{R})$. È facile verificare che la matrice B che cerchiamo verifica la prima uguaglianza delle seguenti identità:
  $$B(A \mid \mathbb{1}_m) = (BA \mid B) = (A' \mid B) \, .$$
  Di conseguenza, portando in forma a scala la parte sinistra del blocco $(A \mid \mathbb{1}_m)$, il blocco di destra risultante è proprio la matrice invertibile B voluta.
- Si osservi che, per quanto detto nel primo punto, in caso di A invertibile il metodo appena descritto ci permette di calcolare la sua inversa $B = A^{-1}$.

Esempio

Sia

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

e determiniamo la matrice B tale che BA è una forma a scala di A.

Come descritto sopra, possiamo determinare B come la parte destra del blocco ottenuto da $(A \mid \mathbb{1}_4)$ ricavandone nella parte sinistra una forma a scala A' di A:

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 3 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{esercizio}} \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}}_{A'} \middle| \underbrace{\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}}_{B} \right)$$

Si verifichi che $A' = BA$.

Esempio

Determiniamo se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

è invertibile e, in caso affermativo, la sua inversa A^{-1}.

Come detto, si tratta di portare in forma a scala il blocco di sinistra della matrice $(A \mid \mathbb{1}_3) \in M_{3,6}(\mathbb{R})$: il numero di pivot dà l'invertibilità di A; successivamente, portando tale blocco in forma $\mathbb{1}_3$, quello di destra risultante è la matrice inversa di A. Abbiamo

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{esercizio}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & \boxed{1} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -9 & 3 & 5 \end{array}\right),$$

pertanto A è invertibile. Per determinare A^{-1} è sufficiente azzerare le entrate $(1,2)$- e $(2,3)$-esima dell'ultima matrice, e rendere unitarie quelle (i,i)-esime, per $i = 1, 2, 3$.

Consideriamo le seguenti operazioni elementari sulle righe dell'ultima matrice a blocchi:

$$7R_2 + R_3 \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & 0 & 5 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & -7 & -9 & 3 & 5 \end{array}\right),$$

$$35R_1 - R_2 \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 70 & 0 & 0 & 30 & -10 & -5 \\ 0 & 35 & 0 & 5 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & -7 & -9 & 3 & 5 \end{array}\right),$$

$$\begin{array}{c} R_1/70 \\ R_2/35 \\ -R_3/7 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/7 & -1/7 & -1/14 \\ 0 & 1 & 0 & 1/7 & 2/7 & 1/7 \\ 0 & 0 & 1 & 9/7 & -3/7 & -5/7 \end{array}\right).$$

Verificare che il blocco di destra è la inversa di A, cioè che $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{1}_3$.

Operazioni e matrici elementari

Concludiamo questa lezione osservando che l'effetto di una moltiplicazione a destra di una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ per una qualsiasi matrice elementare fornisce la matrice ottenuta da A con l'operazione elementare sulle colonne corrispondente, quest'ultima definita nel modo ovvio, cioè scambiando il termine "riga" con il termine colonna "colonna".

Contestualmente, si potrebbero definire come in forma a scala tutte le matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & 0 \\ * & & & & & \\ & * & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & * & & \\ & & & & * & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} & & & & * & 0 \\ & & & * & & \\ & & \iddots & & & \\ & * & & & & \\ * & & & & & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

e simili..., per opportune matrici riga (o colonna) $*$ la cui entrata prossima allo "scalino" è non nulla.