Fondamenti di algebra lineare e geometria

Corso di Laurea in Ingegneria dell'Energia (Canale B)

Lorenzo Martini

Università degli Studi di Padova

A.A. 2023-2024

Lezione 6

Richiamo della lezione precedente

- Operazioni elementari sulle righe di una matrice;
- Ogni matrice A si può ridurre in forma a scala con successione di operazioni elementari sulle righe;
- $S(A, b) = S(A', b')$, dove $(A' \mid b)$ è la forma a scala di $(A \mid b)$;
- Compatibilità e numero di soluzioni di $Ax = b$.

Matrici e loro proprietà

Abbiamo visto l'utilità—soprattutto grafica—delle matrici in relazione ai sistemi lineari. La loro versatilità è molto più variegata di così, e in effetti faremo uso delle matrici sostanzialmente per tutto il corso.
Continuiamo quindi a dare loro proprietà e ad introdurre nuove utili notazioni.

Proposizione (Regole di calcolo in $M_{m,n}(\mathbb{R})$)

Siano $m, n \in \mathbb{N}$.

(i) $A + (B + C) = (A + B) + C$ per ogni $A, B, C \in M_{m,n}(\mathbb{R})$;

(ii) $A + B = B + A$ per ogni $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$;

(iii) $A + 0 = 0 + A$, dove 0 è la matrice $m \times n$ ad entrate nulle, per ogni $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.

Dimostrazione. Basta controllare che le entrate della matrice a primo membro uguagliano le corrispondenti entrate a secondo membro: questo si verifica per definizione cioè in particolare per le proprietà dell'addizione in $\mathbb{R}$. $\square$

Matrici e loro proprietà

Matrici $m \times n$ in cui $m = n$ saranno chiamate matrici quadrate, e il loro insieme $M_{n,n}(\mathbb{R})$ indicato semplicemente come $M_n(\mathbb{R})$.

Definizione

Sia $n \in \mathbb{N}$. Si chiama matrice identità di $M_n(\mathbb{R})$ la matrice $\mathbb{1}_n := (\delta_{ij})$, dove

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \mathbb{1}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Il numero δ_{ij} definito come sopra si chiama delta di Kronecker.)

Come ci si potrebbe aspettare, e come di fatto è, $\mathbb{1}_n$ funge da "elemento neutro" rispetto al prodotto in $M_n(\mathbb{R})$. Come visto, il prodotto matriciale non può essere definito su $M_{m,n}(\mathbb{R})$ a meno che $m = n$. Per questo motivo, diamo le seguenti "regole di calcolo" su opportuni insiemi di matrici, rendendole vere e proprie regole nel caso particolare del solo $M_n(\mathbb{R})$.

Proposizione

(i) $A(BC) = (AB)C$ per ogni $A \in M_{m,p}(\mathbb{R})$, $B \in M_{p,q}(\mathbb{R})$, $C \in M_{q,n}(\mathbb{R})$;

(ii) $A \cdot \mathbb{1}_n = A$ ed $\mathbb{1}_m \cdot A = A$ per ogni $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$;

(iii) $A(B + C) = AB + AC$ per ogni $A \in M_{m,r}(\mathbb{R})$ e $B, C \in M_{r,n}(\mathbb{R})$;

(iv) $(B + C)A = BA + CA$ per ogni $A \in M_{r,n}(\mathbb{R})$ e $B, C \in M_{m,r}(\mathbb{R})$.

Dimostrazione. Verifichiamo le uguaglianze entrata per entrata.
(i) L'entrata (i, j)-esima di $A(BC)$ è la somma data dai prodotti delle p coordinate di riga i-esima di A per le corrispondenti coordinate in colonna j-esima di BC; ciascuna di queste ultime coordinate, cioè $(BC)_{\ell j}$ per $\ell = 1, \dots, n$, è a sua volta la somma dei q prodotti delle coordinate di riga ℓ-esima di B per le corrispondenti coordinate in colonna j-esima di C. In formula, abbiamo

$$[A(BC)]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik}(BC)_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\left(\sum_{\ell=1}^{q} b_{k\ell}c_{\ell j}\right) .$$

L'ultima somma, vivendo in $\mathbb{R}$, può essere "ridistribuita e riassociata" divenendo

$$\sum_{k=1}^{p} a_{ik}\Big(\sum_{\ell=1}^{q} b_{k\ell}c_{\ell j}\Big) = \sum_{\ell=1}^{q}\Big(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{k\ell}\Big)c_{\ell j}\ .$$

Ragionando come sopra, nel secondo membro riconosciamo l'entrata (i,j)-esima del prodotto $(AB)C$.
(ii) Abbiamo

$$(\mathbb{1}_m A)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik}a_{kj} = \delta_{ii}a_{ij} = a_{ij}$$

per ogni $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$. In modo del tutto analogo si prova $A \cdot \mathbb{1}_n = A$.
(iii) e (iv) sono analoghe a (i) e lasciate per esercizio. $\square$

Matrici e loro proprietà

L'usuale proprietà commutativa non è stata scritta per il prodotto matriciale, e a ragione. Infatti, i prodotti AB e BA sono definiti necessariamente solo in $M_n(\mathbb{R})$; tuttavia, neppure in caso di fattori quadrati i prodotti coincidono in generale. Ad esempio,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mentre

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In altre parole, il prodotto matriciale è non commutativo.

Osservazione

Il fatto che su $M_n(\mathbb{R})$ è stata introdotta una moltiplicazione non commutativa non significa che non si possano replicare le usuali nozioni che valgono per il prodotto in $\mathbb{R}$ oppure in $\mathbb{C}$; semplicemente, queste andranno opportunamente formulate "da sinistra" oppure da "da destra" (vedi proprietà distributive (iii) e (iv) sopra).

Matrici invertibili

Definizione

Una matrice quadrata $A \in M_n(\mathbb{R})$ si dice invertibile se esiste $B \in M_n(\mathbb{R})$ tale che

$$AB = BA = \mathbb{1}_n \ .$$

Lemma

Se A è invertibile, allora la matrice B della precedente definizione è unica.

Dimostrazione. Siano $B, C \in M_n(\mathbb{R})$ tali che $AB = BA = \mathbb{1}_n = AC = CA$. Allora

$$B = B \cdot \mathbb{1}_n = B \cdot (AC) \overset{\text{(i)}}{=} (BA) \cdot C = \mathbb{1}_n \cdot C = C \ . \qquad \square$$

L'unica matrice B ad invertire moltiplicativamente una matrice invertibile A è detta inversa di A e denotata come A^{-1}.

Matrici invertibili

Esempio

In vista dell'unicità della matrice inversa, possiamo classificare le matrici invertibili di $M_2(\mathbb{R})$, di fatto indovinandone l'inversa: una matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è invertibile se e solo se $ad - bc \neq 0$; in tal caso,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Nel seguito, classificheremo le matrici invertibili $n \times n$, per n arbitrario. Il sottoinsieme di $M_n(\mathbb{R})$ costituito da tali matrici verrà indicato come $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Per ora, vediamo che $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ è chiuso rispetto al prodotto.

Lemma

Siano A, B matrici $n \times n$ invertibili. Allora AB è invertibile, e si ha

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} \,.$$

Matrici invertibili

Dimostrazione. Anche in questo caso si è indovinata la matrice inversa di AB, infatti vale

$$(AB) \cdot (B^{-1}A^{-1}) = A \cdot (BB^{-1}) \cdot A^{-1} = AA^{-1} = \mathbb{1}_n$$

e analogamente $(B^{-1}A^{-1}) \cdot (AB) = \mathbb{1}_n$. □

Osservazione (Molto importante)

Se di una matrice quadrata $A \in M_n(\mathbb{R})$ conosciamo l'invertibilità e l'inversa, allora sappiamo risolvere tutti i sistemi lineari $Ax = b$ ad essa associata, per ogni $b \in \mathbb{R}^n$. Infatti, l'unica soluzione del sistema è $c = A^{-1}b$.
In questo caso, in virtù del teorema della precedente lezione possiamo essere certi che ogni forma a scala A' di A contenga esattamente n pivot, in particolare che ce ne sia uno in ogni entrata (i, i) della diagonale principale.

In generale, la determinazione della matrice inversa può essere molto dispendiosa in termini di calcoli. D'altro canto, a livello formale l'uso delle inverse semplifica in modo cruciale le varie espressioni matriciali.

Matrice trasposta

Definizione

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $m \times n$ arbitraria. Si chiama trasposta di A, e si indica con A^T, la matrice $n \times m$ definita ponendo

$$((A^T)_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} := (a_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq m}} .$$

In altre parole, A^T è la matrice ottenuta da A scambiandone le righe con le colonne. Ad esempio,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} .$$

A differenza dell'inversa, la trasposta è sempre definita (e per ogni dimensione della matrice) ed immediata da calcolare. Analogamente all'inversa, l'uso della trasposta semplifica i calcoli matriciali; inoltre, è molto utile a livello grafico.

Matrice trasposta

Ad esempio, potremmo scrivere orizzontalmente le matrici colonna $n \times 1$ semplicemente trasponendole, dato che

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}^T .$$

Simmetricamente, la trasposta di una matrice riga $1 \times n$ è una matrice colonna $n \times 1$. In particolare, volendo si potrebbe ritrattare la teoria dei sistemi lineari facendo uso di righe incognite (anziché di colonne), pure mantenendo l'usuale convenzione di scrivere tuple ordinate di numeri in verticale: tutto ciò potrà essere fatto riscrivendo

$$x^T A = b^T \quad \text{in luogo di} \quad Ax = b .$$

Matrice trasposta

Proposizione

Siano $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $C \in M_{n,r}(\mathbb{R})$. Allora:

(i) $(A+B)^T = A^T + B^T$;

(ii) $(\lambda A)^T = \lambda \cdot A^T$, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$;

(iii) $(A^T)^T = A$;

(iv) $(AC)^T = C^T A^T$;

(v) se A è invertibile, allora A^T è invertibile e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Dimostrazione. Tutti i punti sono facili verifiche; proviamo (iv) e (v).

(iv) Abbiamo

$$\begin{aligned} ((AC)^T)_{ij} = (AC)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}c_{ki} &= \sum_{k=1}^{n} (A^T)_{kj}(C^T)_{ik} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (C^T)_{ik}(A^T)_{kj} = (C^T A^T)_{ij} . \end{aligned}$$

(v) $A^T \cdot (A^{-1})^T \overset{\text{(iv)}}{=} (A^{-1}A)^T = \mathbb{1}_n^T = \mathbb{1}_n$; similmente $(A^{-1})^T \cdot A^T = \mathbb{1}_n$.

□