Fondamenti di algebra lineare e geometria

Corso di Laurea in Ingegneria dell'Energia (Canale B)

Lorenzo Martini

Università degli Studi di Padova

A.A. 2023-2024

Lezione 5

Richiamo della lezione precedente

- Sistemi di equazioni lineari.
- Matrici incompleta e completa associata ad un sistema lineare.
- Matrici. Somma e prodotto tra matrici.
- Un sistema è una equazione matriciale $Ax = b$, con $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m = M_{m,1}(\mathbb{R})$ ed x matrice colonna incognita.
- Matrici in forma a scala e compatibilità del sistema lineare corrispondente.

Metodo di eliminazione di Gauss

Siano $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $b \in M_{m,1}(\mathbb{R})$. Dato il sistema lineare $Ax = b$ associato, dobbiamo occuparci di:

- ottenere la forma a scala $(A' \mid b')$ della matrice completa $(A \mid b)$;
- dimostrare che i sistemi $Ax = b$ e $A'x = b'$ sono equivalenti;
- caratterizzare la compatibilità del sistema $A'x = b'$ (dunque di $Ax = b$).

Per il primo punto, dobbiamo fare opportune operazioni "all'interno" della matrice A (e b). In particolare, vogliamo trasformare le righe di A; per questo motivo, scriviamo A esplicitando le sue righe:

$$A = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{pmatrix}$$

con $R_i \in M_{1,n}(\mathbb{R})$ per ogni $i = 1, \ldots, m$.

Operazioni elementari sulle righe

Definizione

Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Sono operazioni elementari sulle righe di A le seguenti:

- scambio di righe;
- moltiplicazione di riga per un numero reale non nullo;
- somma ad una riga di altre righe "moltiplicate" (secondo il punto precedente).

Facendo uso delle righe di A, le precedenti operazioni possono essere schematizzate come segue:

- scambio: $R_i \leftrightarrow R_j$, per qualche $1 \leq i, j \leq m$;
- moltiplicazione $R_i \leftrightarrow \lambda R_i$, per qualche i e $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- somma: $R_i \leftrightarrow R_i + \lambda_{i_1} R_{i_2} + \cdots + \lambda_{i_k} R_{i_k}$, per qualche $1 \leq i, i_1, \ldots, i_k \leq m$ e $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_k} \in \mathbb{R}$ (non tutti nulli).

(Si osservi che moltiplicazione e somma sono definite "punto a punto".)

Riduzione in forma a scala

Proposizione

Ogni matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ può essere trasformata in forma a scala con opportune operazioni elementari sulle sue righe.

Dimostrazione. Possiamo supporre senza perdita di generalità che $t > 0$, cioè che esistono entrate non nulle (altrimenti A sarebbe in forma a scala). Pertanto, sia j_1 il minimo indice di colonna ove appaia un elemento non nullo. Posto i_1 il massimo indice di riga tale che $a_{i_1 j_1} \neq 0$, operiamo, se necessario, lo scambio $R_1 \leftrightarrow R_{i_1}$, in modo da avere nell'entrata $(1, j_1)$ il primo pivot $a_{i_1 j_1}$. A seguito di questa operazione, possiamo reindicizzare le entrate di A, cosicché il nostro primo pivot è a_{1j_1}. Operiamo ora la somma

$$R_i \longleftrightarrow R_i - \frac{a_{ij_1}}{a_{1j_1}} R_1$$

per $i = 2, \ldots, m$, in modo che l'entrata (i, j) diventi $a_{ij} - \dfrac{a_{ij_1}}{a_{1j_1}} a_{1j}$. ⊳

Riduzione in forma a scala

Poniamo
$$\tilde{a}_{ij} := a_{ij} - \frac{a_{ij_1}}{a_{1j_1}}\, a_{1j}.$$

Osserviamo che:

- se $j < j_1$ abbiamo $a_{ij} = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, m$, cosicché $\tilde{a}_{ij} = 0$.
- se $j = j_1$ abbiamo $\tilde{a}_{ij_1} = 0$ per ogni $i = 2, \ldots, m$.

In altre parole, le prime $j_1 - 1$ colonne di $\tilde{A} := (\tilde{a}_{ij})$ sono tutte nulle e nella colonna j_1-esima c'è solo un coefficiente non nullo, in corrispondenza di riga 1.

Ripetiamo il procedimento appena descritto per la seconda riga di $\tilde{A}$, da cui $j_2 > j_1$; successivamente, ripetiamo il procedimento per la terza riga della matrice risultante dal passo precedente ($j_3 > j_2$), fino all'indice di riga m. Ciò che otterremo è la forma a scala A' voluta. $\square$

Osservazione

La forma a scala di una matrice, ottenuta con le operazioni elementari sulle sue righe, non è unica: ad esempio, possiamo moltiplicare ogni riga per un numero non nullo a piacere.

Riduzione in forma a scala

Esempio

Riduciamo in forma a scala la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -4 & -4 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Scriviamo le operazioni elementari sulle righe come schematizzato sopra:

$$R_1 \leftrightarrow R_2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -4 & -4 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} R_3 + R_1 \\ R_4 - R_1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_3 - 2R_2 \\ R_4 + R_2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} R_4 + R_3 \\ R_3/2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Riduzione in forma a scala

Osserviamo che il sistema lineare associato alla forma a scala A' ottenuta, cioè

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ \phantom{x_1 + {}} 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_3 - 3x_4 = 0, \end{cases}$$

ha come soluzione (ottenuta sostituendo all'indietro da $x_3 = 3x_4$)

$$\begin{cases} x_3 = 3x_4 \\ 2x_2 = x_4 \\ x_1 = -3x_4/2 - 12x_4 - 2x_4 = -31x_4/2, \end{cases}$$

da cui

$$S(A', 0) = \left\{ \begin{pmatrix} -31x_4/2 \\ x_4/2 \\ 3x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -31c \\ c \\ 6c \\ 2c \end{pmatrix} \middle| \, c \in \mathbb{R} \right\} .$$

Si osservi infine che le soluzioni ottenute soddisfano anche il sistema $(A \mid 0)$, cioè $S(A', 0) \subseteq S(A, 0)$.

Equivalenza tra sistemi lineari

Passiamo ora a dimostrare che, in generale per ogni matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ed ogni m-upla b, si ha $S(A,b) = S(A',b')$.

Proposizione

Sia $Ax = b$ un sistema lineare qualsiasi. Se $A'x = b'$ è il sistema ottenuto portando in forma a scala la matrice completa $(A \mid b)$, allora

$$S(A,b) = S(A',b') \ .$$

Dimostrazione. Ci è sufficiente dimostrare la proposizione nel caso in cui $(A' \mid b')$ sia la matrice ottenuta applicando <u>una qualsiasi</u> delle tre operazioni elementari sulle righe di $(A \mid b)$.

Scambio. È evidente che scambiare una o più righe di $(A \mid b)$ cioè cambiare l'ordine delle equazioni di $Ax = b$ non altera l'insieme delle soluzioni.

Equivalenza tra sistemi lineari

Moltiplicazione. Moltiplicando la riga i-esima di $(A \mid b)$ per un fattore di scala non nullo λ troviamo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ & \vdots \\ \lambda(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n) &= \lambda b_i \\ & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{cases}$$

ed essendo $\lambda \neq 0$, vediamo che le soluzioni di $Ax = b$ sono esattamente le stesse del precedente sistema, cioè $S(A, b) = S(A', b')$.
Infatti: è chiaro che ogni soluzione di $Ax = b$ è pure soluzione di $A'x = b'$, quindi $S(A, b) \subseteq S(A', b')$; analogamente, moltiplicando per $1/\lambda$ la riga i-esima di $A'x = b'$, ricaviamo $S(A', b') \subseteq S(A, b)$.

Equivalenza tra sistemi lineari

Somma. La prova è analoga al caso precedente: è sufficiente controllare la compatibilità dei sistemi $Ax = b$ e $A'x = b'$ in corrispondenza della riga dove si opera la somma. In particolare, se ad R_i sommiamo $\lambda_{i_1} R_{i_1} + \lambda_{i_2} R_{i_2}$, allora una soluzione c del sistema $Ax = b$ darebbe, in corrispondenza dell'equazione i-esima di $A'x = b'$, l'identità $0 = 0$ su $\mathbb{R}$, cioè

$$\overbrace{b_i}^{R_i c} + \overbrace{\lambda_{i_1} b_{i_1}}^{R_{i_1} c} + \overbrace{\lambda_{i_2} b_{i_2}}^{R_{i_2} c} = \overbrace{b_i + \lambda_{i_1} b_{i_1} + \lambda_{i_2} b_{i_2}}^{i\text{-esimo termine noto}},$$

da cui $S(A, b) \subseteq S(A', b')$. In modo analogo si ottiene l'inclusione reciproca. $\square$

La trattazione del metodo di eliminazione di Gauss può considerarsi conclusa una volta stabilito quando $A'x = b'$ ha soluzione e, in tal caso, quante soluzioni ci sono.

Compatibilità dei sistemi lineari

Sia $(A \mid b)$ già in forma a scala. Ricordiamo che esiste un indice di riga $t \in \mathbb{N}$ tale che $a_{ij} = 0$ per ogni $i = t+1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$; abbiamo inoltre già osservato che, affinché $Ax = b$ sia compatibile, deve essere necessariamente $j_t \leq n$ (ossia non può essere $j_t = n+1$), altrimenti avremmo il pivot b_t e conseguentemente $0 = b_t \neq 0$.

Sia dunque $j_t \leq n$. Per ogni $i = 1, \ldots, t$, l'equazione i-esima del sistema $Ax = b$ è

$$a_{ij_i} x_{j_i} + a_{i,j_i+1} x_{j_i+1} + \cdots + a_{in} x_n = b_i,$$

a_{ij_i} essendo pivot.

Si osservi che in generale $\quad x_{j_{k+\ell}} \neq x_{j_k+\ell}$.

e che in tutte le precedenti equazioni alcune incognite si ripetono ma con indici diversi.

Possiamo quindi dividere l'equazione per a_{ij_i} ed esplicitare complessivamente

$$\begin{cases} x_{j_1} = (b_1 - a_{1,j_1+1}x_{j_1+1} - \cdots - a_{1n}x_n)/a_{1j_1} \\ x_{j_2} = (b_2 - a_{2,j_2+1}x_{j_2+1} - \cdots - a_{2n}x_n)/a_{2j_2} \\ \quad\vdots \\ x_{j_t} = (b_t - a_{t,j_t+1}x_{j_t+1} - \cdots - a_{tn}x_n)/a_{tj_t} \ . \end{cases}$$

Dall'ultima equazione vediamo che x_{j_t} dipende da $n - j_t$ parametri: ogni scelta di valori reali per le incognite $x_{j_t+1}, x_{j_t+2}, \ldots, x_n$ determina un valore reale di x_{j_t}, il quale potremo sostituire nell'equazione $(t-1)$-esima, cioè

$$x_{j_{t-1}} = (b_{t-1} - a_{t-1,j_{t-1}+1}x_{j_{t-1}+1} - \cdots - a_{t-1,n}x_n)/a_{t-1,j_{t-1}},$$

dove di conseguenza $x_{j_{t-1}}$ dipenderà da $j_t - j_{t-1}$ parametri, e così via fino a ricavare un valore di x_{j_1}.

Compatibilità dei sistemi lineari

In altre parole, possiamo liberarci delle t incognite $x_{j_1}, \ldots, x_{j_t}$ che corrispondono ai pivot di A assegnando valori alle restanti incognite. Abbiamo così provato il seguente:

Teorema

Sia $Ax = b$ un sistema lineare. Delle seguenti tre, una:

$$|S(A,b)| = 0, \qquad |S(A,b)| = 1, \qquad |S(A,b)| = \infty \;.$$

($|S|$ denota il numero di elementi dell'insieme S.)

Dimostrazione. Sappiamo che per essere compatibile, la forma a scala di $(A \mid b)$ deve avere $j_t \leq n$. In tal caso, l'eventualità che il sistema abbia un'unica soluzione occorre quando, per ogni $i = 1, \ldots, t$, si ha $j_i - j_{i-1} = 1$. Altrimenti, $Ax = b$ ha infinite soluzioni. □