Fondamenti di algebra lineare e geometria

Corso di Laurea in Ingegneria dell'Energia (Canale B)

Lorenzo Martini

Università degli Studi di Padova

A.A. 2023-2024

Lezione 4

Richiamo della lezione precedente

- Radici n-esime in $\mathbb{C}$.
- Teoremi fondamentale dell'algebra e di Ruffini.
- Applicazioni.
- Coniugio.

Equazioni lineari

Definizione

Una equazione lineare in n incognite a coefficienti reali oppure complessi è una equazione della forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

dove $a_1, \ldots, a_n, b$ sono numeri reali (o complessi).

Una soluzione è dunque una n-upla di numeri reali o complessi $(c_1, \ldots, c_n)$ tale da verificare l'uguaglianza (in $\mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$)

$$a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n = b\ .$$

Ad esempio, $2x_1 - x_2 = 5$, $1 = 0$, $x_1 = \sqrt{-1}$ sono equazioni lineari, il cui insieme delle soluzioni è, rispettivamente:

- $\{(c, 2c-5) \mid c \in \mathbb{R}\} = \{((c+5)/2, c) \mid c \in \mathbb{R}\}$;
- $\emptyset$, infatti $1 \neq 0$ sia in $\mathbb{R}$ che in $\mathbb{C}$;
- $\emptyset$ se siamo in $\mathbb{R}$, altrimenti $\{\sqrt{-1}\} \subseteq \mathbb{C}$.

Sistemi lineari

Definizione

Un sistema lineare è un insieme (finito) di equazioni lineari nelle stesse incognite.

Un sistema di m equazioni in n incognite verrà indicato come segue:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \ . \end{cases}$$

(Si noti l'uso del doppio indice per etichettare i coefficienti.)

Evidentemente, di un sistema lineare come sopra ci interessano gli $m(n+1)$ coefficienti. Ne terremo conto come segue.

Matrice incompleta dei coefficienti

Gli $m \cdot n$ numeri che appaiono nei primi membri del sistema verranno disposti ordinatamente in una tabella di m righe ed n colonne,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

detta matrice incompleta del sistema (trattasi di una matrice $m \times n$). Ad esempio, il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 1 = x_4 - 3x_2 \\ x_1 - x_3 + 1 = 5 \\ x_2 + \pi x_4 = e x_3 \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \qquad\qquad - x_4 = -1 \\ x_1 \qquad\quad - x_3 \qquad\quad = 4 \\ \qquad\quad x_2 - e x_3 + \pi x_4 = 0 \end{cases}$$

ha come matrice incompleta la matrice 3×4

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -e & \pi \end{pmatrix}$$

Matrice completa dei coefficienti

Tutti gli $m(n+1)$ coefficienti verranno scritti in una matrice $m\times(n+1)$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

detta matrice completa del sistema. Nell'esempio precedente,

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_4 = -1 \\ x_1 - x_3 = 4 \\ x_2 - ex_3 + \pi x_4 = 0 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccr|r} 2 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -e & \pi & 0 \end{array}\right).$$

Matrici

Le matrici incompleta e completa di un sistema sono esempi di matrici ad entrare reali o complesse. L'insieme delle matrici $m \times n$ ad entrate reali sarà indicato con $M_{m,n}(\mathbb{R})$, e sarà un oggetto fondamentale del nostro studio. Adotteremo la seguente notazione compatta:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

e pure (a_{ij}), quando è chiaro come variano i e j.

Osservazione

- Le matrici $m \times n$ permettono di raggruppare m-uple ordinate scritte in orizzontale o, analogamente, n-uple ordinate scritte in verticale. In effetti, le righe di una matrice $m \times n$ sono m elementi di $\mathbb{R}^n$, mentre le sue colonne sono n elementi di $\mathbb{R}^m$.

Matrici

In altre parole, possiamo riguardare $M_{m,n}(\mathbb{R})$ come l'insieme $\mathbb{R}^{mn}$; in particolare, $\mathbb{R}^n$ potrà essere identificato sia con l'insieme $M_{1,n}(\mathbb{R})$ delle matrici riga, sia con l'insieme $M_{n,1}(\mathbb{R})$ delle matrici colonna.

- Per motivi che saranno chiari a breve, sarà molto utile riguardare gli elementi di $\mathbb{R}^n$ come matrici colonna (ossia n-uple ordinate scritte in verticale), cioè

$$\mathbb{R}^n = M_{1,n}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \;\middle|\; a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Questa convenzione non cambia in nessun modo $\mathbb{R}^n$ dall'essere l'insieme delle n-uple ordinate di elementi reali).

Operazioni tra matrici

Introduciamo alcune operazioni tra matrici. È importante osservare dove queste sono definite, cioè se tra matrici della stessa forma $m \times n$, oppure con dimensioni diverse.

- Fissati $m, n \in \mathbb{N}$, sull'insieme $M_{m,n}(\mathbb{R})$ è definita un'operazione di somma ponendo

  $$(a_{ij}) + (b_{ij}) := (a_{ij} + b_{ij}),$$

  per ogni coppia di matrici $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$. Si noti che questa addizione $+$ è definita "punto a punto" (cioè entrata per entrata), sfruttando l'addizione di $\mathbb{R}$ (nel secondo membro).
- Per ogni $A = (a_{ij})$ e per ogni numero reale $\lambda \in \mathbb{R}$ definiamo la matrice

  $$\lambda A := (\lambda a_{ij}),$$

  cioè la matrice ottenuta da A scalando tutte le sue entrate per il fattore reale λ (trattasi pure di una definizione "punto a punto").

Operazioni tra matrici

Esiste poi un prodotto tra matrici; questo però non è definito tra matrici della stessa dimensione (né è dato punto a punto).

- Fissati $m, n, r \in \mathbb{N}$, definiamo il prodotto (riga per colonna) di matrici $A \in M_{m,r}(\mathbb{R})$ ed $B \in M_{r,n}(\mathbb{R})$ come la matrice $A \cdot B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ la cui entrata (i, j)-esima è

$$c_{ij} := \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}, \qquad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, n\,. \end{array}$$

Dunque, il prodotto AB è definito solamente quando il numero di righe di B è uguale al numero di colonna di A. In tal caso, l'entrata (i, j)-esima è la somma degli r prodotti delle entrate della i-esima riga di A per le corrispondenti entrate della j-esima colonna di B.

Esempio

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 & 0 \\ -2 & -5 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & (-1)\cdot(-2)+4\cdot 0+1\cdot 2+0\cdot 4 & \\ & \downarrow & \end{array} \\ \begin{pmatrix} -12 & 4 & 12 \\ 15 & 18 & -25 \\ 5 & -6 & 25 \end{pmatrix} \end{array}$$

Sistemi e matrici

Ritorniamo ai sistemi lineari. L'uso delle matrici permette di individuare un generico sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \ . \end{cases}$$

semplicemente come:

- la matrice completa a blocchi $(A \mid b)$, dove A è la matrice incompleta e b è la matrice colonna dei secondi membri ($b \in \mathbb{R}^m = M_{m,1}(\mathbb{R})$);
- l'equazione matriciale $Ax = b$ nell'incognita x, matrice colonna le cui entrate sono le incongite $x_1, \ldots, x_n$. Infatti, l'entrata i-esima del prodotto Ax è

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \ .$$

Sulla compatibilità di un sistema lineare

Il nostro primo obiettivo è discutere e affrontare la risolubilità dei sistemi lineari. Sebbene ormai chiara, diamo la seguente:

Definizione

L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare $Ax = b$ di m equazioni in n incognite è

$$S(A,b) := \left\{ c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; Ac = b \right\}$$

Definizione

Due sistemi $Ax = b$ e $A'x = b'$ si dicono equivalenti se hanno le stesse soluzioni, cioè se $S(A,b) = S(A',b')$.

Definizione

Un sistema $Ax = b$ si dice risolubile o compatibile se $S(A,b) \neq \emptyset$.

Sulla compatibilità di un sistema lineare

L'idea per risolvere un sistema lineare $Ax = b$ è quella di trasformare le matrici A e b in modo da ottenere un sistema equivalente $A'x = b'$ "più semplice"; in particolare, ottenere una matrice A' con il maggior numero di entrate nulle possibile.

Evidentemente, ciascuna riga di A' dovrà avere almeno un'entrata non nulla in corrispondenza di una entrata di b' non nulla (altrimenti l'equazione risultante sarebbe $0 = b_i \neq 0$, impossibile).

Come vedremo (nella prossima lezione), possiamo rendere $Ax = b$ equivalente ad un sistema la cui matrice incompleta $(A' \mid b')$ è in forma a scala. Questo procedimento si chiama metodo di eliminazione di Gauss.

Per ora, diamo la definizione generale di matrice in forma a scala.

Matrici a scala

Definizione

Una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ si dice a scala se

- esiste $t \in \mathbb{N}$ tale che $a_{ij} = 0$ per ogni $i = t+1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$;
- per ogni $i = 1, \ldots, t$ esiste j tale che $a_{ij} \neq 0$. Posto $j_i = \min\{j \mid a_{ij} \neq 0\}$, allora
$$j_1 < j_2 < \cdots < j_t\ .$$

Graficamente, una matrice in forma a scala ha la forma

$$\begin{pmatrix}
0 & a_{1j_1} & * & & & & & & \\
0 & 0 & \ldots & 0 & a_{2j_2} & * & & & \\
\vdots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ddots & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & a_{tj_t} & * \\
0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

0 simboleggia lo zero di $\mathbb{R}$ od opportune matrici ad entrate tutte nulle.
$*$ simboleggia opportune matrici riga ad entrate in $\mathbb{R}$.

Forma a scala e sistema corrispondente

Definizione

Rispetto alla definizione precedente, i numeri reali (non nulli!) a_{ij_i} sono detti pivot della matrice A.

Disporre di una matrice in forma a scala permette di risolvere facilmente il sistema lineare che rappresenta. Ad esempio,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ \quad\;\, - x_2 + \;\; x_3 = 2 \\ \qquad\qquad\;\; 3x_3 = 6 \end{cases}$$

L'unica soluzione è $(-7, 0, 2)$, ottenuta sostituendo all'indietro dall'ultima equazione $x_3 = 2$.
(I pivot della matrice sono $1, -1, 3$.)