Fondamenti di algebra lineare e geometria

Corso di Laurea in Ingegneria dell'Energia (Canale B)

Lorenzo Martini

Università degli Studi di Padova

A.A. 2023-2024

Lezione 3

Richiamo della lezione precedente

- Numeri complessi.
- Somma e prodotto di numeri complessi.
- Rappresentazioni cartesiana, algebrica e trigoniometrica.
- Formule di De Moivre per le potenze

Formula di De Moivre

Con una semplice modifica, vediamo che la formula di De Moivre è vera per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

Corollario

Per ogni $z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ non nullo (cioè con $r \neq 0$), la formula di De Moivre è vera per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

Dimostrazione. Per provare la formula su esponenti interi negativi, è sufficiente osservare che se $n \in \mathbb{N}$, allora $z^{-n} = (z^{-1})^n$; in questo modo possiamo sfruttare la formula di De Moivre dimostrata precedentemente su z^{-1}. Ora, poiché l'inverso di un numero complesso $a + ib \neq 0$ è $\dfrac{a}{a^2+b^2} - i\,\dfrac{b}{a^2+b^2}$, ed essendo nel nostro caso $r^2 = a^2 + b^2$, abbiamo

$$\begin{aligned} z^{-1} &= 1/r^2[r(\cos\vartheta - i\sin\vartheta)] \\ &= r^{-1}[\cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta)], \end{aligned}$$

da cui

$$z^{-n} = (z^{-1})^n = r^{-n}[\cos(-n\vartheta) - i\sin(-n\vartheta)]\,. \qquad \square$$

Radici n-esime

Definizione

Siano z, ζ due numeri complessi. Allora ζ è detto radice n-esima di z se $\zeta^n = z$ (cioè se z è potenza n-esima di ζ).

Ad esempio, l'unità immaginaria i è radice quadrata di -1, cioè $i = \sqrt{-1}$ (si osservi che pure $-i$ è radice quadrata di -1).
Le formule di De Moivre permettono di calcolare le radici n-esime in $\mathbb{C}$.
Infatti, posto $z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$, allora ogni sua radice n-esima ζ, una volta scritta come $\zeta = \varrho(\cos\phi + i\sin\phi)$ deve soddisfare le relazioni

$$\varrho^n = r \quad \text{e} \quad \left.\begin{aligned} \cos(n\phi) &= \cos\vartheta \\ \sin(n\phi) &= \sin\vartheta \end{aligned}\right\} \implies \phi = \frac{\vartheta + 2k\pi}{n}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Pertanto, modulo 2π e cioè dentro l'intervallo $[0, 2\pi[$, ogni numero complesso $z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ possiede esattamente n radici n-esime:

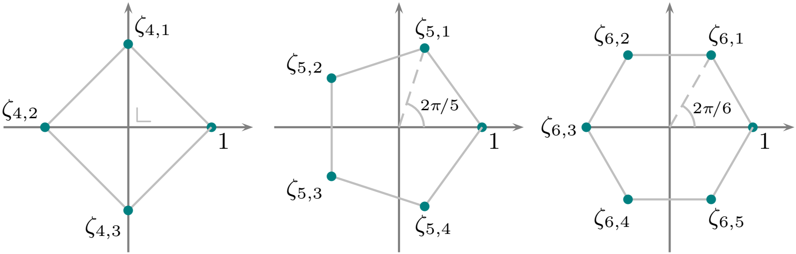
$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\vartheta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Radici n-esime

La precedente formula ci dà le n-radici n-esime dell'unità reale 1:

$$\zeta_{n,k} := \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, \dots, n-1,$$

che, al variare di n, vediamo disporsi sui vertici di un n-gono regolare con un vertice in $(1, 0)$.



Si osservi che, posto $\zeta_n := \zeta_{n,1}$, allora tutte le radice n-esime dell'unità reale si ottengono elevando ζ_n alle potenze di esponente $k = 0, 1, \dots, n-1$, cioè $\zeta_{n,k} = \zeta_n^k$, per ogni k.

Teorema fondamentale dell'algebra

Sebbene non lo dimostreremo, l'insieme $\mathbb{C}$ che abbiamo costruito è effettivamente quello che risolve il problema che ci siamo posti:

Teorema fondamentale dell'algebra

Ogni polinomio in una indeterminata, di grado positivo, a coefficienti in $\mathbb{R}$, ha almeno una soluzione in $\mathbb{C}$.

Siamo comunque interessati alle conseguenze di questo teorema. A tale scopo, ricordiamo un altro risultato fondamentale, che pure non dimostreremo.

Teorema di Ruffini

Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti reali o complessi. Se $p(x)$ ha una radice α, allora il polinomio $x - \alpha$ divide $p(x)$, cioè esiste un polinomio $q(x)$ tale che

$$p(x) = (x - \alpha) \cdot q(x) \ .$$

Si osservi che, sebbene $p(x)$ ha coefficienti tutti reali, la fattorizzazione $p(x) = (x - \alpha)q(x)$ vale tra polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$ oppure in $\mathbb{C}$, a seconda che α sia un numero reale oppure complesso.

Teorema fondamentale dell'algebra

Corollario

Ogni polinomio $p(x)$ si può scrivere come prodotto di polinomi lineari $x - \alpha$, per opportuni $\alpha \in \mathbb{C}$.

Dimostrazione. Sia $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ un polinomio di grado n. Per il teorema fondamentale dell'algebra, $p(x)$ possiede una radice α_1; per il teorema di Ruffini, abbiamo

$$p(x) = (x - \alpha_1) p_1(x)$$

per un opportuno polinomio $p_1(x)$ di grado $n - 1$. Ora, possiamo ripetere il ragionamento appena fatto per $p_1(x)$: questo possiede una radice α_2 in $\mathbb{C}$ (eventualmente, $\alpha_2 = \alpha_1$), cioè $p_1(x) = (x - \alpha_2) p_2(x)$, per un opportuno $p_2(x)$. Questo ragionamento si potrà ripetere fino a che nel prodotto dei polinomi $x - \alpha_i$ non compare x^n; a quel punto si otterrà la fattorizzazione

$$p(x) = (x - \alpha_1)^{m_1} (x - \alpha_2)^{m_2} \cdots (x - \alpha_t)^{m_t},$$

dove $m_1 + m_2 + \cdots + m_t = n$, e $p(\alpha_i) = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, t$. □

Coniugio

Concludiamo la trattazione dei numeri complessi introducendo il coniugato di un numero complesso $z = a + bi$ come il numero $\bar{z} = a - bi$.

Proposizione

L'applicazione di coniugio $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$ gode delle seguenti proprietà:

(i) è un'applicazione biiettiva;

(ii) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;

(iii) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;

(iv) $\bar{\bar{z}} = z$, per ogni $z \in \mathbb{C}$.

(v) per ogni $z = a + bi$, si ha $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$.

Dimostrazione. Esercizio $\square$

Esempio

Risolviamo in $\mathbb{C}$ l'equazione $x^4 + 2x^2 + 4 = 0$ nell'incognita x.

Posto $w = x^2$, otteniamo l'equazione $w^2 + 2w + 4 = 0$, che ha per soluzione in $\mathbb{C}$ i numeri $-1 \pm \sqrt{-3} = -1 \pm \sqrt{3}\, i$. Si tratta quindi di determinare le due radici quadrate di tali numeri complessi.

Applicazioni

Ci conviene esprimere le soluzioni di $w^2 + 2w + 4 = 0$ nella forma trigonometrica $r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$, in modo da sfruttare le formule di De Moivre e trovarne le radici nell'analoga forma $\varrho(\cos\phi + i\sin\phi)$.

Per $z = -1 + \sqrt{3}\,i$ abbiamo $z \cdot \bar{z} = 4$, da cui $r = 2$. L'angolo ϑ per cui $-1 = 2\cos\vartheta$ e $\sqrt{3} = 2\sin\vartheta$ è $\vartheta = \pi/2 + \pi/6 = 2\pi/3$. Ora, le radici quadrate di $z = 2[\cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)]$ hanno entrambe $\varrho = \sqrt{2}$, ed argomento $\phi \in \{(2\pi/3 + 2k\pi)/2 \mid k = 0, 1\} = \{\pi/3, 4\pi/3\}$, per cui sono

$$\begin{aligned}\zeta &\in \left\{\sqrt{2}[\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)], \sqrt{2}[\cos(4\pi/3) + i\sin(4\pi/3)]\right\} \\ &= \left\{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{3}\,i)\right\}.\end{aligned}$$

Analogamente, le due radici quadrate di $z = -1 - \sqrt{3}\,i$ sono

$$\begin{aligned}\zeta &\in \left\{\sqrt{2}[\cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)], \sqrt{2}[\cos(5\pi/3) + i\sin(5\pi/3)]\right\} \\ &= \left\{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + \sqrt{3}\,i)\right\}.\end{aligned}$$

I quattro numeri ζ ottenuti sono le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione assegnata.

Esempio

Determiniamo le radici terze del numero complesso $z = 2 - 2i$.

La forma trigonometrica di z è $2\sqrt{2}[\cos(7\pi/4) + i\sin(7\pi/4)]$, pertanto le sue tre radici cubiche sono

$$\zeta \in \left\{ \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi/4 + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{7\pi/4 + 2k\pi}{3}\right) \;\middle|\; k = 0, 1, 2 \right\},$$

cioè $\sqrt{2}[\cos(7\pi/12) + i\sin(7\pi/12)]$, $\sqrt{2}[\cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4)]$ e $\sqrt{2}[\cos(23\pi/12) + i\sin(23\pi/12)]$.