Fondamenti di algebra lineare e geometria

Corso di Laurea in Ingegneria dell'Energia (Canale B)

Lorenzo Martini

Università degli Studi di Padova

A.A. 2023-2024

Lezione 20

Richiamo della lezione precedente

- Esistenza della funzione determinante.
- Sviluppo di Laplace.
- Applicazioni.

Determinante di un endomorfismo

Dato un endomorfismo $f\colon V \to V$ di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, sappiamo che fissata una base per V rimane definita una matrice A_f che rappresenta f rispetto alla base scelta, e che a basi diverse corrispondono matrici diverse. In particolare, le matrici risultanti sono simili.

Lemma

Matrici simili hanno lo stesso determinante.

Dimostrazione. Due matrici $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ sono simili se esiste $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tale che $A = P^{-1}BP$. Dunque $\det P \neq 0$, e per il teorema di Binet otteniamo quanto enunciato. □

In altre parole, avere lo stesso determinante è una condizione necessaria per due matrici affinché siano simili; tuttavia, vedremo che due matrici possono avere lo stesso determinante senza essere simili.
Dato che matrici che rappresentano lo stesso endomorfismo hanno uguale determinante, cioè quest'ultimo non dipende dalla base che abbiamo fissato per lo spazio vettoriale, ha senso dare la seguente:

Determinante di un endomorfismo

Definizione

Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo lineare. Il determinante di f è il determinante di una matrice che rappresenta f rispetto ad una base per V, e sarà indicato con $\det f$.

Come conseguenza del teorema di Binet, abbiamo:

- $\det(g \circ f) = (\det g)(\det f)$, per ogni coppia di endomorfismi $g, f\colon V \to V$;
- $f\colon V \to V$ è un isomorfismo se e solo se $\det f \neq 0$, e in tale caso $\det(f^{-1}) = (\det f)^{-1}$.

Il nostro prossimo obiettivo è quello di capire, dato un qualsiasi endomorfismo $f\colon V \to V$ di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale n-dimensionale, se esiste una base di V rispetto alla quale la matrice di f assume una forma particolarmente semplice; ad esempio, se è diagonale. Questo nostro obiettivo si traduce nel problema della diagonalizzazione di un endomorfismo, che ora andiamo a formalizzare.

Diagonalizzazione di un endomorfismo

Definizione

Un endomorfismo $f\colon V \to V$ si dice diagonalizzabile se può essere rappresentato da una matrice diagonale.

Possiamo riformulare la precedente definizione pure per una matrice $n \times n$ qualsiasi:

Definizione

Una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ si dice diagonalizzabile se è simile ad una matrice diagonale.

Affinché $f\colon V \to V$ sia diagonalizzabile, occorre trovare una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ per V tale che $f(v_i) = \lambda_i v_i$ per opportuni scalari $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Infatti, rispetto a tale base, detta base diagonale, la matrice di f è

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Autovalori e autovettori

Definizione

Un autovalore di un endomorfismo $f\colon V \to V$ è uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ tale per cui esiste almeno un vettore non nullo v tale che $f(v) = \lambda v$. In tal caso, v è detto autovettore relativo all'autovalore λ.

Commentiamo le precedenti definizioni.

- Un vettore è autovettore relativamente ad un solo autovalore; al contrario, un autovalore può avere più autovettori a sé relativi.
- Un endomorfismo $f\colon V \to V$ è diagonalizzabile se e solo se esiste una base per V fatta di autovettori per f (relativi a certi autovalori). Ad esempio, f può essere diagonalizzabile anche con un solo autovalore $\lambda \neq 0$: la diagonalizzabilità si verifica in presenza di n autovettori distinti e linearmente indipendenti.
- Nella precedente definizione abbiamo escluso il vettore nullo $\vec{0}$ poiché risulterebbe autovettore relativamente ad ogni scalare; inoltre, essendo sempre linearmente dipendente, non darebbe alcun contributo alla costruzione dell'eventuale base diagonale.

Autovalori e autovettori

Ora che abbiamo visto il significato della diagonalizzazione di un endomorfismo, occupiamoci di capire operativamente quando un endomorfismo (o una matrice) è diagonalizzabile.
Nelle usuali notazioni, vediamo che la posizione $f(v) = \lambda v$ si può interpretare come l'uguaglianza sul vettore v degli endomorfismi lineari f e $\dot{\lambda}$, dove $\dot{\lambda}$ è la moltiplicazione scalare per λ, cioè $\dot{\lambda}\colon V \to V$, $v \mapsto \lambda v$, per ogni $v \in V$.
Con questa semplice osservazione abbiamo tradotto un'uguaglianza in V come conseguenza di un'uguaglianza in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V)$; ora, grazie alla struttura di $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di quest'ultimo insieme, data "punto a punto", otteniamo

$$f(v) = \lambda v \iff (f - \dot{\lambda})(v) = \vec{0} \iff v \in \mathrm{Ker}(f - \dot{\lambda}) \, .$$

Abbiamo così provato che:

Dato un endomorfismo $f\colon V \to V$, allora uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ è suo autovalore se e solo se

$$\mathrm{Ker}(f - \dot{\lambda}) \neq \{\vec{0}\} \, .$$

Autospazi

Se λ è autovalore per f, allora il sottospazio $\mathrm{Ker}(f - \dot{\lambda})$ di V contiene tutti e soli gli autovettori relativi a λ; è detto suo autospazio ed indicato con $E_f(\lambda)$.
Come sempre, sarà sufficiente ottenere una base di un autospazio per poterlo descrivere compeltamente.

Definizione

Si chiama molteplicità geometrica di un autovalore λ per l'endomorfismo $f\colon V \to V$ la dimensione (su $\mathbb{K}$) dell'autospazio relativo, e si scrive

$$m_g(\lambda) := \dim E_f(\lambda) = \mathrm{null}(f - \dot{\lambda}) \ .$$

Proposizione

Per ogni endomorfismo $f\colon V \to V$,

(i) autovettori relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti;

(ii) autospazi relativi ad autovalori distinti sono in somma diretta.

Dimostrazione. (i) Proveremo che se $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sono autovalori per $f\colon V \to V$, a due a due distinti, e se v_i è un autovettore relativo a λ_i, per ogni $i = 1, \dots, r$, allora l'insieme $\{v_1, \dots, v_r\}$ è linearmente indipendente. Induzione su r. La base induttiva $(r = 1)$ è verificata per definizione: poiché c'è solo un autovalore λ_1, un suo autovettore v_1 è non nullo, e come tale linearmente indipendente.
Supponiamo ora l'asserto vero per $r - 1$ e dimostriamolo per r. Siano $v_1, \dots, v_r$ autovettori relativi ordinatamente agli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, e consideriamo una loro espressione di dipendenza lineare

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{r-1} v_{r-1} + \alpha_r v_r = \vec{0}\,. \qquad [1]$$

Applicando f (e ricordando che $f(v_i) = \lambda_i v_i$), otteniamo

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha_{r-1} \lambda_{r-1} v_{r-1} + \alpha_r \lambda_r v_r = \vec{0}\,. \qquad [2]$$

Moltiplicando [1] per λ_r e sottraendo con [2], otteniamo

$$(\lambda_r - \lambda_1)\alpha_1 v_1 + \cdots + (\lambda_r - \lambda_{r-1})\alpha_{r-1} v_{r-1} = \vec{0},$$

ed essendo $\{v_1, \dots, v_{r-1}\}$ linearmente indipendente per ipotesi induttiva, otteniamo

$$(\lambda_r - \lambda_1)\alpha_1 = \cdots = (\lambda_r - \lambda_{r-1})\alpha_{r-1} = 0,$$

da cui $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{r-1} = 0$, poiché gli $\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}$ sono a due a due distinti. Sostituendo in [1] ricaviamo $\alpha_r v_r = \vec{0}$, da cui $\alpha_r = 0$ poiché $v_r \neq \vec{0}$.

(ii) Bisogna provare che se $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sono autovalori per $f\colon V \to V$, a due a due distinti, allora per ogni $i = 1, \dots r$ si ha

$$E_f(\lambda_i) \cap \sum_{\substack{j=1,\dots,r \\ j\neq i}} E_f(\lambda_j) = E_f(\lambda_i) \cap \bigoplus_{\substack{j=1,\dots,r \\ j\neq i}} E_f(\lambda_j) = \{\vec{0}\}\ .$$

Induzione su $r \geq 2$. Se esistesse $\vec{0} \neq v \in E_f(\lambda_1) \cap E_f(\lambda_2)$, allora avremmo contemporaneamente $\lambda_1 v = \lambda_2 v$, da cui $(\lambda_1 - \lambda_2)v = \vec{0}$ e dunque $\lambda_1 = \lambda_2$ poiché $v \neq \vec{0}$, contraddizione.

Autospazi

Supponiamo ora che ad $r-1$ autovalori distinti corrispondano autospazi in somma diretta. Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ autovalori distinti; senza perdita di generalità, possiamo dimostrare che

$$E_f(\lambda_1) \cap \sum_{j=2}^{r} E_f(\lambda_j) = E_f(\lambda_1) \cap \bigoplus_{j=2}^{r} E_f(\lambda_j) = \{\vec{0}\} .$$

Se per assurdo esistesse $v \neq \vec{0}$ nella precedente intersezione, allora v risulterebbe contemporaneamente autovettore relativo a λ_1 e combinazione lineare di autovettori $v_2, \ldots, v_r$, ognuno dei quali relativo al corrispondente autovalore λ_i. Pertanto, avremmo

$$v = \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_r v_r$$

cioè

$$v - \alpha_2 v_2 - \cdots - \alpha_r v_r = \vec{0},$$

per unici scalari $\alpha_2, \ldots, \alpha_r$ (si ricordi che la somma degli autospazi $E_f(\lambda_2), \ldots, E_f(\lambda_r)$ è diretta, per ipotesi induttiva). Abbiamo così ottenuto un'espressione di dipendenza lineare non banale tra vettori che sono linearmente indipendenti per il punto (i); contraddizione. □

Autospazi

Osservazione

Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sono autovalori per uno stesso endomorfismo, a due a due distinti, per la formula di Grassmann abbiamo

$$\dim\Big(\bigoplus_{i=1}^{r} E_f(\lambda_i)\Big) = \sum_{i=1}^{r} m_g(\lambda_i) \ .$$

Traduciamo quanto visto sopra in termini matriciali.

Dato un endomorfismo $f\colon V \to V$, sia A la matrice che lo rappresenta in una fissata base di V; per ogni scalare $\lambda \in \mathbb{K}$, l'endomorfismo lineare $\dot{\lambda}\colon V \to V$ è rappresentato dalla matrice scalare $\lambda \mathbb{1}_n = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{smallmatrix}\right)$ (questo accade rispetto a qualunque base di V).
Ora, il fatto che λ è autovalore per f se e solo se $\mathrm{Ker}(f - \dot{\lambda}) \neq \{\vec{0}\}$ è pure equivalente a che l'endomorfismo $f - \dot{\lambda}$ non sia iniettivo. Possiamo dunque affermare quanto segue.

Polinomio caratteristico

Dato un endomorfismo $f\colon V \to V$, allora uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ è suo autovalore se e solo se

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}_n) = 0 \; .$$

Si noti che

$$A - \lambda \mathbb{1}_n = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} .$$

Per ogni autovalore λ di f (cioè di A), le coordinate in $\mathbb{K}^n$ degli autovettori ad esso relativi si trovano risolvendo il sistema lineare omogeneo $(A - \lambda \mathbb{1}_n)x = 0$.

Definizione

Siano $f\colon V \to V$ ed A come sopra. Il polinomio $\det(A - x\mathbb{1}_n) \in \mathbb{K}[x]$ è detto polinomio caratteristico di f (o di A).

Polinomio caratteristico

In definitiva:

- gli autovalori di f sono tutte e sole le radici del polinomio caratteristico $\det(A - x\mathbb{1}_n)$, cioè le soluzioni $\lambda \in \mathbb{K}$ dell'equazione $\det(A - x\mathbb{1}_n) = 0$ nell'incognita x;
- per ogni autovalore λ, gli autovettori ad esso relativi sono le soluzioni del sistema lineare $(A - \lambda\mathbb{1}_n)x = 0$.

Lemma

Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.

Dimostrazione. È facile provare che le matrici scalari Λ commutano con ogni matrice M, cioè $M\Lambda = \Lambda M$. Nelle solite notazioni, abbiamo

$$\begin{aligned} A - \lambda\mathbb{1}_n = P^{-1}BP - \lambda\mathbb{1}_n &= P^{-1}BP - \lambda\mathbb{1}_n \overbrace{P^{-1}P}^{=\mathbb{1}_n} \\ &= P^{-1}BP - P^{-1}\lambda_n\mathbb{1}_nP = P^{-1}(B - \lambda\mathbb{1}_n)P \end{aligned}$$

e applicando il teorema di Binet concludiamo. □

Sulla fattorizzazione di un polinomio

Un campo $\mathbb{K}$ si dice algebricamente chiuso se tutti i polinomi di $\mathbb{K}[x]$ possiedono una radice in $\mathbb{K}$. In tal caso, qualsiasi polinomio $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ di grado n si fattorizza, su $\mathbb{K}$, nel prodotto di fattori lineari (cioè di grado 1), eventualmente ripetuti:

$$p(x) = (x - \alpha_1)^{m_1} \cdot (x - \alpha_2)^{m_2} \cdots (x - \alpha_t)^{m_t}$$

dove $m_1 + m_2 + \cdots + m_t = n$, e α_k sono tutte e sole le radici di $f(x)$, contate con la loro molteplicità m_k.

Osservazione

- Si potrebbe dimostrare che ogni campo $\mathbb{K}$ possiede una propria chiusura algebrica, definita come il più piccolo campo (algebricamente chiuso) contenente tutte le radici dei polinomi in $\mathbb{K}[x]$ (e quindi $\mathbb{K}$).
- Il teorema fondamentale dell'algebra afferma che $\mathbb{C}$ è un campo algebricamente chiuso. In particolare, è la chiusura algebrica di $\mathbb{R}$ (ma non di $\mathbb{Q}$: la sua chiusura algebrica è strettamente contenuta in $\mathbb{C}$).
- In definitiva, la fattorizzazione di un polinomio dipende dal campo su cui si riguardano i suoi coefficienti.

Polinomio caratteristico

Quindi, se $\mathbb{K}$ è un campo algebricamente chiuso (ad esempio, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), dato un endomorfismo $f \colon V \to V$, con $n = \dim V$, il suo polinomio caratteristico $p_f(x) := \det(A - x\mathbb{1}_n)$ si fattorizzerà nel prodotto di polinomi lineari:

$$\det(A - x\mathbb{1}_n) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdot (x - \lambda_2)^{m_2} \cdots (x - \lambda_t)^{m_t}$$

dove le radici $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ sono tutti e soli gli autovalori di f, e $m_1 + \cdots + m_t = n$.

Definizione

La molteplicità algebrica di un autovalore λ di f è la sua molteplicità nella fattorizzazione di $p_f(x)$, e si indicherà come $m_a(\lambda)$.

Teorema

Sia $f \colon V \to V$ un endomorfismo. Per ogni suo autovalore λ, si ha

$$m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) .$$

Dimostrazione. Al solito, sia A la matrice di f rispetto ad una base di V fissata. Posto $r := m_g(\lambda)$, sia $\{v_1, \ldots, v_r\}$ una base dell'autospazio $E_f(\lambda)$, e completiamola ad una base $\{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ per V. Rispetto a questa base, f si rappresenta come

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & 0 & \\ & \ddots & & B' \\ 0 & & \lambda & \\ \hline & 0 & & B'' \end{array}\right) \quad \text{per opportune} \quad \begin{array}{l} B' \in M_{r,n-r}(\mathbb{K}) \\ B'' \in M_{n-r}(\mathbb{K}), \end{array}$$

ed essendo simile ad A (poiché entrambe rappresentano f) avrà il suo stesso polinomio caratteristico. Grazie alla formula dello sviluppo di Laplace, è facile vedere che

$$\begin{aligned} \det(B - x\mathbb{1}_n) &= (-1)^r(\lambda - x)^r \det(B'' - x\mathbb{1}_{n-r}) \\ &= (-1)^{r+1}(x - \lambda)\det(B'' - x\mathbb{1}_{n-r}) \,. \end{aligned}$$

Ora, il polinomio caratteristico di B'' potrebbe contere altri fattori del tipo $x - \lambda$, pertanto $r \leq m_a(\lambda)$, come voluto. $\square$

Teorema di diagonalizzabilità

Siamo finalmente giunti ad enunciare e provare il seguente:

Teorema di diagonalizzabilità di un endomorfismo

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Un endomorfismo $f\colon V \to V$ è diagonalizzabile su $\mathbb{K}$ se e solo se

(i) tutti gli autovalori di f appartengono al campo $\mathbb{K}$;

(ii) per ogni autovalore λ di f si ha $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$.

Dimostrazione. Supponiamo che $A = A_f$ sia diagonalizzabile, quindi simile ad una matrice diagonale a blocchi

$$D = \begin{pmatrix} \boxed{D_1} & & & 0 \\ & \boxed{D_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{D_r} \end{pmatrix}, \quad \text{dove} \quad D_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{pmatrix} \in M_{m_k}(\mathbb{K})$$

ed m_k è la molteplicità algebrica $m_a(\lambda_k)$ di λ_k, per ogni $k = 1, \ldots, r$, da cui $m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n$. Per definizione delle matrici D_k, la condizione (i) è verificata.

(ii) Per ipotesi di diagonalizzabilità e cioè per l'esistenza di una base per V composta di autovettori per f, grazie alla precedente proposizione abbiamo $V = \bigoplus_{k=1}^{r} E_f(\lambda_k)$. Passando al calcolo delle dimensioni, per il precedente teorema otteniamo

$$n = \sum_{k=1}^{r} m_g(\lambda_k) \leq \sum_{k=1}^{r} m_a(\lambda) \stackrel{\text{(i)}}{=} n,$$

da cui

$$\sum_{k=1}^{r} m_g(\lambda_k) = \sum_{k=1}^{r} m_a(\lambda) \, .$$

L'ultima uguaglianza, unitamente alle disuguaglianze $m_g(\lambda_k) \leq m_a(\lambda_k)$ per ogni $k = 1, \ldots, r$, forza queste ultime ad essere uguaglianza.

Supponiamo ora che le condizioni (i) e (ii) siano verificate, e dimostriamo che f è diagonalizzabile. Con tali ipotesi, abbiamo

$$\det(A - x\mathbb{1}_n) = (-1)^r (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_r)^{m_r},$$

dove $\lambda_k \in \mathbb{K}$ ed $m_k = m_g(\lambda_k)$, per ogni $k = 1, \ldots, r$.

Teorema di diagonalizzabilità

Abbiamo quindi $n = m_1 + \cdots + m_r$, inoltre possiamo formare le basi

$$\begin{gathered}
\{v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \dots, v_{m_1}^{(1)}\} \text{ per } E_f(\lambda_1), \\
\{v_1^{(2)}, v_2^{(2)}, \dots, v_{m_2}^{(2)}\} \text{ per } E_f(\lambda_2), \\
\vdots \\
\{v_1^{(r)}, v_2^{(r)}, \dots, v_{m_r}^{(r)}\} \text{ per } E_f(\lambda_r)\ .
\end{gathered}$$

Prendendo tutti i vettori abbiamo n autovettori per f, che sono linearmente indipendenti o perché appartengono alla base di uno stesso autospazio $E_f(\lambda_k)$, o perché appartengono ad autospazi relativi ad autovalori distinti. $\square$

Esempio

Si dica se l'endomorfismo

$$f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_3 - x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

Teorema di diagonalizzabilità

La matrice che rappresenta f nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ è $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, quindi il polinomio caratteristico di f è

$$p_f(x) = \det(A - x\mathbb{1}_3) = \det \begin{pmatrix} -x & -1 & 1 \\ 3 & 4-x & -3 \\ 1 & 1 & -x \end{pmatrix} = -x^3 + 4x^2 - 5x + 2 \, .$$

Una radice di $p_f(x)$ è $\lambda = 1$, e la divisione del polinomio per $x - 1$, cioè

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - 4x^2 + 5x - 2 & x - 1 \\ \cline{2-2}
x^3 - x^2 \phantom{{}+5x-2} & x^2 - 3x + 2 \\ \hline
-3x^2 + 5x + 2 & \\
-3x^2 + 3x \phantom{{}+2} & \\ \cline{1-1}
2x - 2 &
\end{array}$$

dà $p_f(x) = -(x-1)(x^2 - 3x + 2) = -(x-1)^2(x-2)$, cosicché gli autovalori di f sono $\lambda_1 = 1$, con molteplicità algebrica 2, e $\lambda_2 = 2$, con molteplicità algebrica 1. Calcoliamone l'autospazio relativo.

Teorema di diagonalizzabilità

Abbiamo

$$\begin{aligned} E_f(1) &= \operatorname{Ker}(f - \dot{1}) = S(A - \mathbb{1}_3, \vec{0}) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 & = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 & = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 & = 0 \end{cases} \right\} \quad (R_2 = R_3 - 2R_1) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 - x_3 = 0 \right\} = \langle (1,0,1)^T, (0,1,1)^T \rangle, \end{aligned}$$

da cui $m_g(1) = m_a(1)$, e

$$\begin{aligned} E_f(2) &= \operatorname{Ker}(f - \dot{2}) = S(A - 2\mathbb{1}_3, \vec{0}) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 & = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 & = 0 \end{cases} \right\} = \langle (1,-3,-1)^T \rangle, \end{aligned}$$

da cui $m_g(2) = m_a(2)$.

Teorema di diagonalizzabilità

Quindi f risulta diagonalizzabile, ed A simile alla matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ tramite la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ di cambiamento di base dalla base canonica di $\mathbb{R}^3$ a quella diagonale, per cui le sue colonne sono ordinatamente gli (auto)vettori della base degli autospazi $E_f(1)$ ed $E_f(2)$.

Osservazione

(1) Abbiamo visto che matrici simili hanno sempre uguali determinante e polinomio caratteristico. Il viceversa non vale in generale: le matrici

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

possiedono lo stesso polinomio caratteristico, ma non sono simili poiché Λ è scalare e quindi è simile solamente a se stessa (si ricordi infatti che le matrici scalari commutano con tutte le matrici, pertanto la classe di similitudine di Λ vale $\{P\Lambda P^{-1} \mid P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\} = \{\Lambda\}$). ⊳

Teorema di diagonalizzabilità

(2) La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ (il polinomio $x^2 + 1$ non possiede radici reali). In particolare, non tutte le matrici invertibili sono diagonalizzabili. D'altra parte, una matrice diagonalizzabile è invertibile se e solo se i suoi autovalori sono non nulli.