Fondamenti di algebra lineare e geometria

Corso di Laurea in Ingegneria dell'Energia (Canale B)

Lorenzo Martini

Università degli Studi di Padova

A.A. 2023-2024

Lezione 2

Richiamo della lezione precedente

- Nozioni preliminari: insiemi (inclusione, appartenenza, uguaglianza).
- Applicazioni. Suriettività ed iniettività. Composizione. Invertibilità.
- Prodotti cartesiani.
- Funzioni ed equazioni polinomiali.

Numeri complessi

La costruzione di tale insieme si può fare in molti modi, tra loro equivalenti. Noi la intraprenderemo con quello più geometrico, comunque discutendone l'equivalenza con gli altri. In effetti, questo approccio si basa solamente su nozioni insiemistiche che abbiamo già introdotto:

Definizione

Chiamiamo insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi il piano reale, cioè poniamo $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$.

(Con la precedente definizione abbiamo solo dato un altro nome, di convenienza, all'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.) Su $\mathbb{C}$ definiamo i seguenti numeri complessi,

$$(a,b) + (a',b') := (a+a', b+b')$$
$$(a,b) \cdot (a',b') := (aa' - bb', ab' + a'b),$$

detti somma e prodotto, per ogni coppia di numeri complessi $(a,b), (a',b') \in \mathbb{C}$. Si osservi che la somma è definita "coordinata per coordinata", mentre il prodotto è misto.

Somma di numeri complessi

Proposizione

Somme di numeri complessi godono delle seguenti proprietà:

A1 $(a,b)+[(a',b')+(a'',b'')]=[(a,b)+(a',b')]+(a'',b'')$, per ogni $a,b,\dots,a'',b''\in\mathbb{R}$;

A2 $(a,b)+(a',b')=(a',b')+(a,b)$, per ogni $a,b,a',b'\in\mathbb{R}$;

A3 $(a,b)+(0,0)\ (=(0,0)+(a,b))=(a,b)$, per ogni $a,b\in\mathbb{R}$;

A4 $(a,b)+(-a,-b)=(0,0)$, per ogni $a,b\in\mathbb{R}$.

Dimostrazione. Tutte le proprietà discendono dalle analoghe valide in $\mathbb{R}$ (poiché la somma in $\mathbb{C}$ è definita sulle coordinate); si verifichino i dettagli per esercizio. $\square$

Ogni numero complesso della forma $(-a,-b)$ si potrà indicare col simbolo $-(a,b)$; così, la proprietà A4 si scriverà nella forma più familiare $(a,b)-(a,b)=(0,0)$.

Prodotto di numeri complessi

Proposizione

Prodotti di numeri complessi godono delle seguenti proprietà:

M1 $(a,b)\cdot[(a',b')\cdot(a'',b'')] = [(a,b)\cdot(a',b')]\cdot(a'',b'')$, per ogni $a,b,\dots,a'',b''\in\mathbb{R}$;

M2 $(a,b)\cdot(a',b') = (a',b')\cdot(a,b)$, per ogni $a,b,a',b'\in\mathbb{R}$;

M3 $(a,b)\cdot(1,0)\ (= (1,0)\cdot(a,b)) = (a,b)$, per ogni $a,b\in\mathbb{R}$;

M4 $(a,b)\cdot\left(\dfrac{a}{a^2+b^2},\dfrac{-b}{a^2+b^2}\right) = (1,0)$, per ogni $a,b\in\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}$.

Dimostrazione. Esercizio. (Si noti che $\mathbb{R}\smallsetminus\{0\} = \{c\in\mathbb{R} \mid c\neq 0\}$.) $\square$

Osservazione

Il sottoinsieme $\mathbb{R}\times\{0\} = \{(c,0)\mid c\in\mathbb{R}\}$ di $\mathbb{C}$ costituito dalle coppie ordinate con seconda coordinata nulla si comporta come l'insieme $\mathbb{R}$:

$$(a,0)+(a',0) = (a+a',0)$$
$$(a,0)\cdot(a',0) = (aa',0),$$

Numeri complessi

per ogni $a, a' \in \mathbb{R}$. In effetti,

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (c, 0) &\longmapsto c \end{aligned}$$

è evidentemente un'applicazione biiettiva (l'inversa essendo $c \mapsto (c, 0)$). In altre parole, abbiamo individuato dentro $\mathbb{C}$ una "copia" di $\mathbb{R}$ (del resto, $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, quindi la cosa non deve sorprenderci). Si osservi poi che:

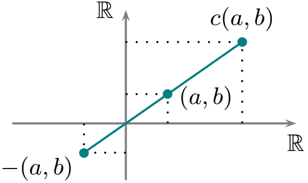
- $(-a, -b) = (-1, 0)(a, b)$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, da cui $(-a, -b) = -(a, b)$, come convenuto precedentemente;
- per ogni $(a, b) \in \mathbb{C}$, con $a, b \neq 0$, possiamo indicare con $1/(a, b)$ oppure $(a, b)^{-1}$ il numero complesso $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$ visto in M4, in modo da ottenere la scrittura più familiare $(a, b) \cdot (a, b)^{-1} = 1$.

Grazie all'identificazione di $\mathbb{R}$ con $\mathbb{R} \times \{0\}$ all'interno di $\mathbb{C}$, vediamo inoltre che

$$c(a, b) = (c, 0)(a, b) = (ca, cb),$$

Prodotto di numeri complessi

per ogni $c, a, b \in \mathbb{R}$. Questo significa che il prodotto di un numero complesso (a, b) per un numero reale c ha l'effetto di riscalare, in $\mathbb{R}$, le coordinate del numero complesso secondo il fattore c.



Nella figura abbiamo rappresentato i numeri complessi coinvolti segnando anche il segmento che li congiunge all'origine del piano; trattasi di una convenzione grafica.

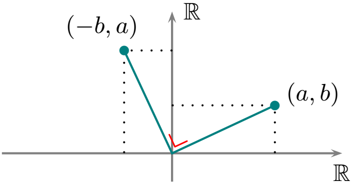
I restanti prodotti in $\mathbb{C}$ non hanno un corrispettivo in $\mathbb{R}$. Ad esempio:

$$(0, 1) \cdot (a, b) = (-b, a),$$

per ogni $a, b \in \mathbb{R}$. Quest'ultima uguaglianza ha delle conseguenze molto importanti.

Prodotto di numeri complessi

- L'uguaglianza $(0,1) \cdot (a,b) = (-b,a)$ ci dice che moltiplicare un numero complesso qualsiasi per $(0,1)$ si traduce geometricamente nella rotazione del punto rappresentato da tale numero di un angolo di novanta gradi attorno all'origine del piano.



- In particolare, abbiamo $(0,1) \cdot (0,1) = (-1,0)$, che per quanto detto precedentemente ci dice che il quadrato del numero complesso $(0,1)$ viene rappresentato dal numero reale -1. Questa è una proprietà aritmetica inedita, poiché in $\mathbb{R}$ non esistono quadrati negativi. In generale, nessun numero complesso della forma $(0,b)$ può essere rappresentato da un numero reale.

In particolare, l'equazione $x^2 + 1 = 0$ ha soluzione $(0,1)$ in $\mathbb{C}$.

Rappresentazione algebrica

Infine, vediamo che ogni numero complesso (a, b) si decompone come

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0),$$

per cui, rinominando $i := (0, 1)$, possiamo riscrivere tale numero come

$$a + ib$$

ossia come una somma del numero reale a con la scrittura formale ib, dove $i^2 = -1$. Il numero complesso i viene chiamato unità immaginaria. Osserviamo che per numeri complessi espressi in questo modo rimangono definite le operazioni di somma e prodotto, coerentemente con quelle introdotte precedentemente,

$$\begin{aligned} (a + ib) + (a' + ib') &= (a + a') + i(b + b') \\ (a + ib) \cdot (a' + ib') &= (aa' - bb') + i(ab' + a'b), \end{aligned}$$

con le analoghe proprietà. In definitiva, abbiamo stabilito una biiezione

$$\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \longleftrightarrow \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\},$$

e potremo riguardare pure il secondo di questi insiemi come se fosse $\mathbb{C}$.

Rappresentazioni di un numero complesso

Possiamo distinguere le rappresentazioni di un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ nella:

- forma cartesiana, se $z = (a, b)$;
- forma algebrica, se $z = a + ib$.

Ripetiamo che avremmo potuto definire $\mathbb{C}$ come l'insieme dei numeri della forma $a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$ ed i un numero non reale tale che $i^2 = -1$ (dando significato formale alla giustapposizione di simboli ib) e dimostrare che esiste una biiezione naturale con $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Uno dei vantaggi della rappresentazione cartesiana di $\mathbb{C}$ è quindi quello di avere un'interpretazione geometrica più spiccata, ma entrambe le rappresentazioni possono essere combinate assieme. Ad esempio, c'è un modo molto pratico di calcolare le potenze in $\mathbb{C}$. Infatti, dato $z = a + ib$, è chiaro che esistono unici $r \geq 0$ e $0 \leq \vartheta < 2\pi$ tali che $a = r\cos\vartheta$ e $b = r\sin\vartheta$, da cui $r^2 = a^2 + b^2$, e così

$$z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\ .$$

Formula di De Moivre

Proposizione (Formula di De Moivre)

Per ogni numero complesso $z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$z^n = r^n[\cos(n\vartheta) + i\sin(n\vartheta)] \ .$$

La dimostrazione sfrutta un argomento di fondamentale importanza in matematica, detto principio di induzione. Trattasi di un assioma della teoria degli insiemi con il quale si può provare che una certa proprietà $\mathcal{P}(n)$ coinvolgente i numeri naturali vale per ogni $n \in \mathbb{N}$. L'induzione consta di due passaggi:

- base induttiva, dove si dimostra che $\mathcal{P}(n_0)$ è vera, per un fissato $n_0 \in \mathbb{N}$;
- passo induttivo, dove si suppone vera l'affermazione $\mathcal{P}(n-1)$ al fine di dimostrare che pure $\mathcal{P}(n)$ è vera.

Una volta portati a termine questi due passaggi, il principio di induzione garantisce che la proprietà $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. (Durante il corso, ci capiterà di dimostrare alcuni fatti usando l'induzione.)

Formula di De Moivre

Dimostrazione (della proposizione). Proviamo che l'affermazione $\mathcal{P}(n)$ dell'enunciato è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$ ragionando per induzione su n.

Base induttiva. Dobbiamo provare che $\mathcal{P}(0)$ è vera, cioè che $z^0 = r^0[\cos(0\vartheta) + i\sin(0\vartheta)]$. Evidentemente, non c'è nulla da dimostrare, poiché abbiamo l'identità $1 = 1$ (in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{C}$). Notiamo che avremmo anche potuto scegliere come base induttiva $n = 1$, ottenendo l'identità $z = z$ su $\mathbb{C}$.

Passo induttivo. Supponiamo che

$$z^{n-1} = r^{r-1}[\cos((n-1)\vartheta) + i\sin((n-1)\vartheta)]$$

e dimostriamo che

$$z^n = r^n[\cos(n\vartheta) + i\sin(n\vartheta)] \ .$$

Scrivendo il primo membro come $z \cdot z^{n-1}$, oppure scrivendo $n\vartheta = (n-1)\vartheta + \vartheta$ nel secondo, per l'ipotesi induttiva e per le note formule di addizione di coseno e seno, otteniamo subito quanto voluto. Quindi, la formula di De Moivre è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. $\square$