Fondamenti di algebra lineare e geometria

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica (Canale 2)

Lorenzo Martini

Università degli Studi di Padova

A.A. 2023-2024

Lezione 19

Richiamo della lezione precedente

- Funzioni determinanti.
- Determinanti e matrici delle operazioni elementari.
- Unicità della funzione determinante.
- Teorema di Binet.

Esistenza del determinante

Nella precedente lezione abbiamo provato l'unicità della funzione determinante, supponendo che ne esistesse almeno una. Oggi esibiremo una funzione $d_n \colon M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ che verifica le proprietà della funzione determinante, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Di conseguenza, d_n saranno le funzioni determinanti, per ogni n. Tuttavia, come anticipato le formule che daremo saranno difficili da motivare, ma appunto funzionano...
Data una matrice quadrata $A = (a_{ij})$ di ordine n, per ogni $1 \leq i, j \leq n$ indicheremo con $A^{(i,j)}$ la sottomatrice $(n-1)\times(n-1)$ ottenuta da A rimuovendone la riga i-esima e la colonna j-esima.

Definizione

Chiamiamo determinante la funzione $d_n \colon M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ definita ricorsivamente come segue:

- $d_1(\lambda) := \lambda$, per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ (si ricordi che $M_1(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$);
- per $n \geq 2$, poniamo per ogni $A \in M_n(\mathbb{K})$

$$d_n(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} d_{n-1}(A^{(i,1)}) \, .$$

Esistenza del determinante

Prima di dimostrare che le d_n sono effettivamente delle funzioni determinante, ricordiamo che la ricorsività della loro definizione significa che definiamo d_n per mezzo di d_{n-1}, per ogni $n \geq 2$. In particolare, data $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$, allora $d_n(A)$ si ottiene come la somma pesata degli n determinanti

$$d_{n-1}\begin{pmatrix} & & & \\ & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},\ d_{n-1}\begin{pmatrix} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & & & \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \dots$$

$$\dots, d_{n-1}\begin{pmatrix} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \\ & & & \end{pmatrix},$$

e ciascuno di questi consiste a sua volta di $n-1$ somme in cui ogni addendo è un determinante $d_{n-2}(-)$, e così via fino ad ottenere i determinanti di sottomatrici 2×2 (od 1×1, cioè elementi di $\mathbb{K}$).

Esistenza del determinante

Teorema

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, la funzione $d_n \colon M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ è un determinante.

Dimostrazione. Induzione su n. Iniziamo col dimostrare la base induttiva, ossia che $d_1(\mathbb{1}_1) = 1$ e che d_1 è lineare sulle righe dei sui argomenti (l'alternanza non sussiste, poiché gli argomenti hanno solamente una riga). Queste affermazioni sono banalmente verificate.
Vediamo ora il passo induttivo, cioè assumiamo che d_{n-1} è una funzione determinante, e dimostriamo che pure d_n lo è. Verifichiamo che $d_n(\mathbb{1}_n) = 1$. Per definizione e per ipotesi induttiva, abbiamo

$$\begin{aligned} d_n(\mathbb{1}_n) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \delta_{i1} d_{n-1}({\mathbb{1}_n}^{(i,1)}) \\ &= (-1)^{1+1} d_{n-1}(\mathbb{1}_{n-1}) = 1, \end{aligned}$$

δ_{i1} essendo la delta di Kronecker. Vediamo ora che d_n è lineare sulle righe dei suoi argomenti. Supponiamo che $R_k = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$, dove $v_i^T \in \mathbb{K}^n$.

Esistenza del determinante

Sia B_s la matrice ottenuta da A sostituendo R_k con v_s, per $s = 1, 2$. Verifichiamo che

$$d_n(A) = \lambda_1 d_n(B_1) + \lambda_2 d_n(B_2)$$

(si noti che $A \neq \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2$). Per ipotesi induttiva, abbiamo $d_{n-1}(A^{(i,1)}) = \lambda_1 d_{n-1}(B_1^{(i,1)}) + \lambda_2 d_{n-1}(B_2^{(i,1)})$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. Sostituiamo:

$$\begin{aligned}
d_n(A) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} d_{n-1}(A^{(i,1)}) \\
&= (-1)^{k+1} a_{k1} d_{n-1}(A^{(k,1)}) + \sum_{\substack{i=1,\ldots,n \\ i \neq k}} (-1)^{i+1} a_{i1} d_{n-1}(A^{(i,1)}) \\
&= (-1)^{k+1} (\lambda_1 v_{11} + \lambda_2 v_{21}) d_{n-1}(A^{(k,1)}) \\
&\qquad + \sum_{\substack{i=1,\ldots,n \\ i \neq k}} (-1)^{i+1} a_{i1} [d_{n-1}(B_1^{(i,1)}) + \lambda_2 d_{n-1}(B_2^{(i,1)})]
\end{aligned}$$

e tenuto conto che $A^{(k,1)} = B_1^{(k,1)} = B_2^{(k,1)}$, riassociando e ridistribuendo le somme otteniamo

$$\begin{aligned} d_n(A) = (-1)^{k+1}\lambda_1 v_{11} d_{n-1}(B_1^{(k,1)}) + \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ i\neq k}} (-1)^{i+1} a_{i1} d_{n-1}(B_1^{(i,1)}) \\ + (-1)^{k+1}\lambda_2 v_{21} d_{n-1}(B_2^{(k,1)}) + \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ i\neq k}} (-1)^{i+1} a_{i1} d_{n-1}(B_2^{(i,1)}) \\ = \lambda_1[d_{n-1}(B_1)] + \lambda_2[d_n(B_2)] \ . \end{aligned}$$

Rimane da verificare l'alternanza di d_n sulle righe dei suoi argomenti, assumendola verificata per il determinante d_{n-1}. Supponiamo che in A si abbia $R_j = R_k$, con $j < k$. Per ogni $i \neq j, k$, la sottomatrice $A^{(i,1)}$ ha due righe identiche, quindi per ipotesi induttiva si ha $d_{n-1}(A^{(i,1)}) = 0$. Quanto ad $A^{(j,1)}$ e $A^{(k,1)}$, vediamo che queste hanno le stesse righe ma in ordine diverso:

Esistenza del determinante

- le prime $j-1$ righe coincidono;
- la j-esima riga di $A^{(k,1)}$ è la $(k-1)$-esima riga di $A^{(j,1)}$;
- per $j+1 \leq \ell \leq k-1$, la riga ℓ-esima di $A^{(k,1)}$ è la riga $(\ell-1)$-esima di $A^{(j,1)}$.

Pertanto, con $k-j+1$ scambi di righe su $A^{(k,1)}$ otteniamo $A^{(j,1)}$. Ora, essendo per ipotesi induttiva d_{n-1} un determinante, abbiamo $d_{n-1}(A^{(j,1)}) = (-1)^{k-j+1} d_{n-1}(A^{(k,1)})$, e in conclusione

$$\begin{aligned} d_n(A) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} d_{n-1}(A^{(i,1)}) \\ &= (-1)^{j+1} a_{j1} d_{n-1}(A^{(j,1)}) + (-1)^{k+1} a_{k1} d_{n-1}(A^{(k,1)}) \\ &= (-1)^{j+1} a_{j1} [(-1)^{k-j+1} d_{n-1}(A^{(k,1)})] \\ &\qquad\qquad + (-1)^{k+1} a_{k1} d_{n-1}(A^{(k,1)}) \\ &= (-1)^{k+2} a_{k1} d_{n-1}(A^{(k,1)}) + (-1)^{k+1} a_{k1} d_{n-1}(A^{(k,1)}) = 0\,. \quad \square \end{aligned}$$

Sviluppo di Laplace

D'ora in poi indicheremo con $\det$ la funzione determinante $M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, cioè lasceremo n sottointeso.

Corollario (Sviluppo di Laplace)

Sia A una matrice $n \times n$. Si ha

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{(i,j)}) \qquad \text{per ogni } j = 1, \dots, n;$$

e

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{(i,j)}) \qquad \text{per ogni } i = 1, \dots, n.$$

Dimostrazione. Osserviamo che la prima formula è lo sviluppo del determinante rispetto alla colonna j-esima (quindi è la nostra definizione di determinante per $j = 1$), mentre la seconda è lo sviluppo del determinante rispetto alla riga i-esima. Ci è sufficiente dimostrare la veridicità di una sola formula, poiché l'altra si ottiene per trasposizione. ⊳

Sviluppo di Laplace

Proviamo ad esempio la formula di sviluppo secondo la colonna j-esima. Sia B la matrice che ha come prima colonna la colonna j-esima di A, per $2 \leq \ell \leq j$ ha come colonna ℓ-esima la colonna $(\ell - 1)$-esima di A, e nelle restanti colonne le stesse di A. In particolare, B è ottenuta da A tramite $j - 1$ scambi di colonna, inoltre $B^{(i,1)} = A^{(i,j)}$ e $b_{i1} = a_{ij}$ per ogni indice di riga i. Calcoliamo:

$$\begin{aligned}\det A = (-1)^{j-1} \det B &= (-1)^{j-1} \Big(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} b_{i1} \det(B^{(i,1)}) \Big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{(i,j)}) \ . \qquad \square\end{aligned}$$

Esempio

Sviluppiamo il determinante della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ secondo la seconda riga.

Sviluppo di Laplace

Abbiamo

$$\begin{aligned}\det A = (-1)^{2+1} \cdot 3 \det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \\ + (-1)^{2+3} \cdot 2 \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \\ = -3 \cdot (-12) + 6 - 2(4+12) = 10 \,.\end{aligned}$$

Osservazione

Applicare la formula dello sviluppo di Laplace su una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ richiede il calcolo di n determinanti di sottomatrici $(n-1)\times(n-1)$; ciascuno di questi determinanti richiede poi il calcolo di $n-1$ determinanti di sottomatrici $(n-2)\times(n-2)$. Iterando la formula, vediamo che per il calcolo di $\det A$ occorrono circa $n!$ operazioni aritmetiche in $\mathbb{K}$ (somme e prodotti).

Sviluppo di Laplace

Calcolando invece $\det A$ sfruttando il metodo di eliminazione di Gauss, occorre portare A in forma a scala, il che richiede di ottenere $n(n-1)/2$ entrate nulle, ciascuna delle quali si ottiene con circa n operazioni aritmetiche in $\mathbb{K}$ (per azzerare un'entrata occorre sommare alla riga che la contiene un multiplo di un'altra riga).
In totale, occorrono circa $n^2(n-1)/2$ operazioni aritmetiche per ottenere $\det A$ in questo modo.
Ora $n!$ cresce molto più velocemente di $n^2(n-1)/2$, già per valori piccoli di n. In definitiva, è molto più efficiente sfruttare il metodo di eliminazione di Gauss invece che applicare la formula dello sviluppo di Laplace.

Analogamente al metodo di eliminazione di Gauss, la formula di Laplace fornisce un metodo per il calcolo dell'inversa di una matrice invertibile.
Per ogni matrice $A = (a_{ij})$ in $M_n(\mathbb{K})$, chiamiamo suo cofattore (o anche complemento algebrico) lo scalare

$$a_{ij}^* := (-1)^{i+j} \det(A^{(i,j)}) \, .$$

Matrice dei cofattori

La matrice A è legata ai propri cofattori tramite le evidenti uguaglianze

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} a_{ij}^* = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{ij}^*$$

valide rispettivamente per ogni $j = 1, \dots, n$ ed ogni $i = 1, \dots, n$, date dalle formule di Laplace. Sia $A^* = (a_{ij}^*)$ la matrice dei cofattori di A.

Proposizione

Per ogni $A \in M_n(\mathbb{K})$, $A \cdot (A^*)^T = (A^*)^T \cdot A = (\det A)\mathbb{1}_n$.

Dimostrazione. Per ogni $1 \leq i, j \leq n$ abbiamo

$$[A \cdot (A^*)^T]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk}^* = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{ik} \det(A^{(j,k)}) \ .$$

Quindi, se $j = i$ abbiamo la formula per $\det A$; se $j \neq i$, allora otteniamo lo sviluppo lungo la riga j-esima della matrice ottenuta da A ponendo in riga j-esima la riga R_i, quindi per alternanza la somma si annulla. In definitiva, abbiamo $[A \cdot (A^*)^T]_{ij} = \delta_{ij} \cdot \det A$. □

Matrice dei cofattori

Corollario

Se A è una matrice invertibile, allora

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \left(A^*\right)^T .$$

Osservazione

- La precedente formula per il calcolo dell'inversa generalizza quella data per matrici 2×2, ossia

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

  se $ad - bc \neq 0$.
- Esattamente come per il calcolo del determinante con lo sviluppo di Laplace, la precedente formula è interessante dal punto di vista teorico, ma molto onerosa in termini di calcolo per $n \geq 3$.

Regola di Cramer

Corollario (Regola di Cramer)

Siano $A \in M_n(\mathbb{K})$ e $b \in \mathbb{K}^n$. Se A è invertibile, allora l'unica soluzione $c = (c_1, \ldots, c_n)^T$ del sistema lineare $Ax = b$ è data da

$$c_i = \frac{\det A_{(i)}}{\det A} \quad (i = 1, \ldots, n),$$

$A_{(i)}$ essendo la matrice $n \times n$ ottenuta da A sostituendone R_i con b.

Dimostrazione. Essendo A invertibile, l'unica soluzione di $Ax = b$ è $c = A^{-1}b$. Grazie al precedente corollario, otteniamo per ogni $1 \le i \le n$,

$$c_i = (A^{-1}b)_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{a^*_{ji}}{\det A}\, b_j = \frac{1}{\det A}\Big(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+i} b_j \det(A^{(j,i)})\Big),$$

riconoscendo nell'ultima somma lo sviluppo secondo la colonna i-esima del determinante della matrice $A_{(i)}$. $\square$