Fondamenti di algebra lineare e geometria

Corso di Laurea in Ingegneria dell'Energia (Canale B)

Lorenzo Martini

Università degli Studi di Padova

A.A. 2023-2024

Lezione 18

Richiamo della lezione precedente

- Matrici di cambiamento di base.
- Matrici equivalenti.
- Matrici simili.

Funzioni determinante

Iniziamo l'argomento "Determinanti e diagonalizzazione di endomorfismi".

Siano $n \in \mathbb{N}$ e $\mathbb{K}$ un campo. Con il termine "determinante" si intende una funzione $d_n \colon M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ soddisfacente a specifiche proprietà; ogni sua immagine $d_n(A)$ sarà un numero che contiene moltissime informazioni sulla matrice argomento A.

Sebbene si possa sempre richiedere che una funzione soddisfi a certe proprietà, occorre dimostrare che esiste almeno un esempio di tale funzione. Nel caso dei determinanti, ci sono molti approcci per definirli—cioè di dichiarare le loro proprietà specifiche—e contestualmente di provarne l'esistenza. Inoltre, ciascuno di tali approcci porterà alla conclusione che essenzialmente esiste solo una funzione determinante.

Il nostro approccio prevede quanto segue:

- daremo le proprietà specifiche per funzioni $d_n \colon M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$;
- proveremo che se le funzioni d_n esistono, allora ce n'è solo una;
- risolveremo il problema dell'esistenza "indovinando" una funzione determinante d_n.

Funzioni determinante

Osservazione

Sebbene la strategia di indovinare una funzione determinante sia "poco elegante" (poiché potrebbe non essere affatto chiaro come sia stata ottenuta), almeno ci darà una formula operativa per calcolarne i suoi valori. Dobbiamo fare questa scelta per motivi di tempo: provare l'esistenza di funzioni determinante richiede una teoria che non utilizzeremmo altrove durante il corso.

Ad ogni modo, daremo una definizione di determinante che generalizzi quella ben nota di determinante di una matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{R})$, e cioè dell'assegnazione $\det\colon A \mapsto ad - bc$. Si noti che A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.

Otterremo cioè una funzione $\det\colon M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ che, tra le varie sue proprietà, classifichi le matrici $n \times n$ invertibili.

Funzioni determinante

Definizione

Siano $n \in \mathbb{N}$ e $\mathbb{K}$ un campo. Si chiama determinante ogni funzione $d_n \colon M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ tale che:

(i) $d_n(\mathbb{1}_n) = 1$;

(ii) d_n è lineare sulle righe R_i dei suoi argomenti:

$$d_n \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ \lambda_1 v_1^T + \lambda_2 v_2^T \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} = \lambda_1 d_n \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ v_1^T \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} + \lambda_2 d_n \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ v_2^T \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix};$$

(dove $R_i = \lambda_1 v_1^T + \lambda_2 v_2^T$) per ogni $i = 1, \ldots, n$, $v_1, v_2 \in \mathbb{K}^n$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$.

(iii) d_n è alternante sulle righe: se A ha due righe identiche, allora $d_n(A) = 0$.

Funzioni determinante

Commentiamo la precedente definizione.

- In (i) abbiamo preassegnato un valore ad una specifica matrice, quella identica. Qualsiasi sia la formula per la funzione determinante d_n che individueremo, essa dovrà valere 1 sulla matrice identica. Grazie a (ii), vediamo che sarà pure $d_n(\lambda \mathbb{1}_n) = \lambda$, per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$.
- La linearità sulle righe non implica la linearità: quest'ultima richiede che sia $d_n(A_1 + A_2) = d_n(A_1) + d_n(A_2)$ e $d_n(\lambda A) = \lambda d_n(A)$, fatti che vedremo non essere veri in generale.
- Non è difficile verificare che l'assegnazione $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mapsto ad - bc$ definisce una funzione determinante $d_2 \colon M_2(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ (si verifichi).

Passiamo ora a dimostrare che se una funzione determinante $d_n =: \det \colon M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ esiste, allora è essenzialmente unica. Per farlo, ne studiamo il comportamento rispetto alle operazioni elementari sulle righe.

Determinante e matrici elementari

Lemma

Sia A una matrice $n \times n$. Allora

$$\det(\Sigma(i,j)A) = -\det A\,.$$

Dimostrazione. Ricordiamo che $\Sigma(i,j)A$ è la matrice ottenuta da A scambiandone la riga R_i con la riga R_j. Consideriamo la matrice ottenuta da $\Sigma(i,j)A$ sommando R_j alla sua riga i-esima, e sommando R_i alla sua riga j-esima. Per linearità ed alternanza abbiamo:

$$\det \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i + R_j \\ \vdots \\ R_j + R_i \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_j + R_i \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_j \\ \vdots \\ R_j + R_i \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$$

Determinante e matrici elementari

$$= \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_j \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_j \\ \vdots \\ R_j \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_j \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$$

$$= \det A + 0 + 0 + \det(\Sigma(i,j)A),$$

cioè $\det A + \det(\Sigma(i,j)A) = 0$, che è quanto voluto. $\square$

La linearità sulle righe fornisce immediatamente il seguente

Lemma

Sia A una matrice $n \times n$. Allora

$$\det(\Lambda(i;\lambda)A) = \lambda \det A \,.$$

Determinante e matrici elementari

Lemma

Sia A una matrice $n\times n$. Allora

$$\det(\Xi(i,j;\lambda)A) = \det(A)\ .$$

Dimostrazione. Ricordiamo che $\Xi(i,j;\lambda)A$ è la matrice ottenuta da A sommando alla sua riga R_i la riga λR_j. Per linearità sulle righe, e per alternanza, abbiamo

$$\det(\Xi(i,j;\lambda)A) = \det\begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i + \lambda R_j \\ \vdots \\ R_j \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_j \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} + \lambda\det\begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_j \\ \vdots \\ R_j \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$$

$$= \det A + 0 = \det A\ .$$

□

Unicità del determinante

Corollario

Se la matrice A ha una riga di soli zero, allora $\det A = 0$.

Dimostrazione. Poiché scambi di righe modificano solamente il segno del determinante, possiamo supporre che la riga nulla di A sia la prima. Abbiamo allora, per linearità:

$$\det \begin{pmatrix} \vec{0} \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0v \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} = 0 \det \begin{pmatrix} v \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} = 0 \, . \qquad \square$$

Proposizione

Sia $\det \colon M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ una funzione determinante. Allora $\det$ è l'unica funzione determinante.

Dimostrazione. Proveremo che $\det$ è descritto completamente dalle operazioni elementari che portano A in una sua forma a scala.

Unicità del determinante

Sia A' una forma a scala di A. Grazie ai precedenti lemmi abbiamo

$$\det A' = (-1)^s \lambda_t \cdots \lambda_1 \det A,$$

dove s è il numero di scambi $\Sigma(i,j)$ effettuati, e $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ sono i coefficienti delle moltiplicazioni $\Lambda(i_k; \lambda_k)$. Osserviamo che è $\alpha := (-1)^s \lambda_1 \cdots \lambda_t \neq 0$, poiché ogni λ_k è non nullo. Di conseguenza, $\det A = \alpha^{-1} \det A'$.

Ora, se $\operatorname{rk} A < n$, allora A' ha almeno una riga di soli zero, pertanto $\det A' = 0$ e di conseguenza $\det A = 0$.

Se invece $\operatorname{rk} A = n$, allora sappiamo di poter portare A' nella forma $\mathbb{1}_n$, dopo ulteriori opportune operazioni elementari sulle righe. In particolare, abbiamo $\det A' = \mu_t \cdots \mu_1 \det(\mathbb{1}_n) = \mu_t \cdots \mu_1$, per unici scalari μ_k.

Complessivamente, otteniamo

$$\det A = \beta \det(\mathbb{1}_n) = \beta$$

per un unico scalare non nullo β. In definitiva, $\det A$ dipende dalle (matrici delle) operazioni elementari che portano A in una sua forma a scala A'. (Si osservi che aver posto $\det(\mathbb{1}_n) = 1$ è cruciale per ottenere che $\det A = \beta$ per un unico numero β.) $\square$

Proprietà del determinante

Supposta l'esistenza di una funzione determinante $\det$, la precedente proposizione ne dà la sua unicità ma pure un metodo per calcolarla. Inoltre, il determinante classifica le matrici invertibili di $M_n(\mathbb{K})$:

Corollario

Sia A una matrice $n \times n$. Allora $\operatorname{rk} A = n$ se e solo se $\det A \neq 0$.

Abbiamo poi alcune prime proprietà di calcolo.

Corollario

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n \times n$.

(i) Se A ha due righe linearmente dipendenti, allora $\det A = 0$.

(ii) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ (in particolare, $\det$ non è lineare).

(iii) Se A è una matrice triangolare superiore (risp. inferiore), cioè $a_{ij} = 0$ se $i > j$ (risp. $i < j$), allora $\det A$ è il prodotto $a_{11} \cdots a_{nn}$ delle entrate diagonali di A.

Proprietà del determinante

Dimostrazione. (i) L'ipotesi dà $\operatorname{rk} A < n$, da cui $\det A = 0$.
(ii) Come visto, $\det(\Lambda(i;\lambda)A) = \lambda \det A$ per ogni matrice A. Ora, $\lambda A = \Lambda(n;\lambda)\cdots\Lambda(1;\lambda)A$, per cui passando ai determinanti si conclude.
(iii) Sia A triangolare superiore. Distinguiamo due casi. Se tutte le entrate diagonali a_{ii} sono non nulle, allora A è in forma a scala e $\operatorname{rk} A = n$. Con sole pre-moltiplicazioni di A per $\Xi(i,j;\lambda_j)$ possiamo ottenere una matrice diagonale, ossia in cui $a_{ij} \neq 0$ se $i \neq j$. Poiché tale matrice coincide con $\Lambda(n;a_{nn})\cdots\Lambda(1;a_{11})\mathbb{1}_n$, passando ai determinanti troviamo proprio

$$\det A = a_{11}\cdots a_{nn}\ .$$

Se invece $a_{ii} = 0$ per qualche indice i, allora $\operatorname{rk} A < n$, cioè $\det A = 0$, e abbiamo concluso. $\square$

Teorema di Binet

Corollario

Per ogni $1 \leq i, j \leq n$ e $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, si ha

$$\det \Sigma(i,j) = -1, \quad \det \Lambda(i;\lambda) = \lambda, \quad \det \Xi(i,j;\lambda) = 1 \ .$$

Dimostrazione. $\Sigma(i,j)$ è la matrice ottenuta da $\mathbb{1}_n$ con lo scambio di riga i-esima con riga j-esima. Quindi $\det \Sigma(i,j) = -\det(\mathbb{1}_n) = -1$. Le rimanenti matrici elementari sono triangolari (superiori oppure inferiori), e si conclude per il corollario precedente. □

Il seguente importante risultato sancisce la moltiplicatività del determinante.

Teorema (Binet)

Siano A, B due matrici $n \times n$. Allora

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B \ .$$

Dimostrazione. Notiamo che l'enunciato è vero se A è una delle matrici elementari $\Sigma(i,j)$, $\Lambda(i;\lambda)$ o $\Xi(i,j;\lambda)$.

Teorema di Binet

Supponiamo ora che A non sia una matrice elementare ma che comunque abbia rango massimo. In questo caso, poiché $\mathbb{1}_n$ è una forma a scala di A, allora quest'ultima è un prodotto di matrici elementari, diciamo $A = B_t \cdots B_1$, da cui $\det A = \det B_t \cdots \det B_1$ per associatività del prodotto matriciale, e per l'argomento del passo precedente. Analogamente, otteniamo:

$$\begin{aligned} \det(A \cdot B) &= \det(B_t \cdot B_{t-1} \cdots B_1 B) = \det[B_t(B_{t-1} \cdots B_1 B)] \\ &= \det B_t \cdot \det(B_{t-1} \cdots B_1 B) = \cdots \\ &= \det B_t \cdots \det B_1 \cdot \det B = \det A \cdot \det B \ . \end{aligned}$$

Se invece $\operatorname{rk} A < n$, cioè $\det A = 0$, allora la pre-moltiplicazione per A,

$$\begin{aligned} \dot{A} \colon M_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow M_n(\mathbb{K}) \\ B &\longmapsto AB, \end{aligned}$$

non è una funzione suriettiva di $M_n(\mathbb{K})$ in se stesso. Poiché $AB \in \operatorname{Im} \dot{A}$, passando ai ranghi troviamo $\operatorname{rk}(AB) \leq \operatorname{rk} A < n$, per cui $\det(AB) = 0$ e abbiamo concluso. $\square$

Proprietà del determinante

Corollario

Per ogni $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ si ha $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

Dimostrazione. Sappiamo già che una matrice A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$. In questo caso, essendo $AA^{-1} = \mathbb{1}_n$, per il teorema di Binet otteniamo $\det A \cdot \det(A^{-1}) = \det(\mathbb{1}_n) = 1$, cioè quanto voluto. □

Corollario

Per ogni $A \in M_n(\mathbb{K})$ si ha $\det(A^T) = \det A$.

Dimostrazione. Se $\operatorname{rk} A < n$, essendo $\operatorname{rk} A^T = \operatorname{rk} A$ troviamo $\det A^T = 0$, e abbiamo concluso. Supponiamo dunque A invertibile. Se A è una matrice elementare, allora pure A^T lo è, dato che

$$\Sigma(i,j)^T = \Sigma(i,j), \quad \Lambda(i;\lambda)^T = \Lambda(i;\lambda), \quad \Xi(i,j;\lambda)^T = \Xi(j,i;\lambda)\ .$$

Se A non è una matrice elementare (ma comunque invertibile), allora $A = B_t \cdots B_1$, con B_k matrici elementari. Dunque $A^T = B_t^T \cdots B_1^T$, e per i punti precedenti ed il teorema di Binet concludiamo. □

Proprietà del determinante

Osservazione

L'uguaglianza $\det A = \det A^T$ ci dice che potremo calcolare il determinante di A anche attraverso operazioni elementari sulle sue colonne; in tal caso, avremo $\det A = (-1)^{s'} \mu_{t'} \cdots \mu_1 \det A'$, dove $A' = AC_1 \cdots C_{t'}$, C_k essendo opportune matrici elementari, s' il numero di scambi $\Sigma(i,j)$ tra queste ultime (cioè, $\Sigma(i,j)$ sono scambi di colonna effettuati), e μ_k i coefficienti delle $\Lambda(i_k;\mu_k)$ (cioè delle moltiplicazioni di colonna).

Esempio

In un precedente esempio, abbiamo trovato che la matrice 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{possiede} \quad A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

come sua forma a scala, tramite le seguenti operazioni sulle righe:

$$\begin{Bmatrix} R_2 + 2R_1 \\ R_3 - 3R_1 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \{5R_3 - 3R_2\} \,.$$

Proprietà del determinante

Si noti che l'ultima operazione è la composizione della moltiplicazione $\Lambda(3;5)$ con l'addizione $\Xi(3;2,-3)$. Abbiamo quindi

$$\det A' = 5 \det A$$

da cui

$$\det A = \frac{\det A'}{5} = \frac{2 \cdot 5 \cdot (-7)}{5} = -14,$$

$\det A'$ essendo noto poiché A' è una matrice triangolare superiore.