Fondamenti di algebra lineare e geometria

Corso di Laurea in Ingegneria dell'Energia (Canale B)

Lorenzo Martini

Università degli Studi di Padova

A.A. 2023-2024

Lezione 17

Richiamo della lezione precedente

- Nucleo ed immagine.
- Immagine inversa.
- Teorema "nullità + rango".

Matrici di cambiamento di base

Siano V, W due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali, $n = \dim V$ ed $m = \dim W$. Abbiamo visto che per un'applicazione lineare $f: V \to W$, alla scelta di basi $\mathcal{V}$ per V e $\mathcal{W}$ per W corrisponde un'unica matrice $A_f := \mathrm{Mat}(f; \mathcal{V}, \mathcal{W})$ in $M_{m,n}(\mathbb{K})$ che la rappresenta. La costruzione di A_f si fa per mezzo degli isomorfismi $V \cong \mathbb{K}^n$ e $W \cong \mathbb{K}^m$ indotti dalla scelta delle basi $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ rispettivamente (come al solito, fisseremo su $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^m$ le loro basi canoniche). In altre parole, abbiamo il seguente diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\cong"'] & W \arrow[d, "\cong"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "A_f"] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

Vogliamo studiare come cambia A_f quando fissiamo basi diverse, sia per V che per W, diciamo

$$\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}, \qquad \mathcal{W} = \{w_1, \ldots, w_m\},$$
$$\mathcal{V}' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}, \qquad \mathcal{W}' = \{w'_1, \ldots, w'_m\}.$$

Cioè, vogliamo ottenere una relazione tra le quattro matrici A_f che si ottengono da tali basi. Evidentemente, ci basterà ottenere una relazione matriciale tra

$$A_f := \mathrm{Mat}(f; \mathcal{V}, \mathcal{W}) \quad \text{e} \quad A'_f := \mathrm{Mat}(f; \mathcal{V}', \mathcal{W}') \; .$$

Tale relazione ci viene indicata direttamente dai diagrammi commutativi che otteniamo in questo contesto, come indicato nel seguente schema, in cui diamo dei nomi agli isomorfismi non canonici $V \cong \mathbb{K}^n$ e $W \cong \mathbb{K}^m$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[r, "A'_f"] & \mathbb{K}^m \\
V \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\cong"'] & W \arrow[u, "\cong"'] \arrow[d, "\cong"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "A_f"] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}
\longrightarrow
\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[r, "A'_f"] \arrow[d, dotted, bend right] & \mathbb{K}^m \arrow[d, dotted, bend left] \\
V \arrow[u, "\phi'"] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"] & W \arrow[u, "\psi'"'] \arrow[d, "\psi"'] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "A_f"] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}
\longrightarrow
\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[r, "A'_f"] \arrow[d, "\phi'^{-1}"'] & \mathbb{K}^m \arrow[d, "\psi'^{-1}"] \\
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & W \arrow[d, "\psi"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "A_f"] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}$$

Ci basta quindi interpretare in modo matriciale la composizione degli isomorfismi verticali del diagramma commmutativo di destra.

Matrici di cambiamento di base

Infatti, $\phi \circ \phi'^{-1}$ e $\psi \circ \psi'^{-1}$ sono isomorfismi lineari e conseguentemente rappresentati da opportune matrici quadrate invertibili, diciamo rispettivamente P e Q. Più precisamente, per costruzione abbiamo

$$\begin{aligned} P &= \mathrm{Mat}(\phi \circ \phi'^{-1}; \mathcal{E}_n, \mathcal{E}_n) \\ &= \mathrm{Mat}(\phi; \mathcal{V}, \mathcal{E}_n) \cdot \mathrm{Mat}(\phi'^{-1}; \mathcal{E}_n, \mathcal{V}') = A_\phi \cdot A_{\phi'}^{-1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Q &= \mathrm{Mat}(\psi \circ \psi'^{-1}; \mathcal{E}_m, \mathcal{E}_m) \\ &= \mathrm{Mat}(\psi; \mathcal{W}, \mathcal{E}_m) \cdot \mathrm{Mat}(\psi'^{-1}; \mathcal{E}_m, \mathcal{W}') = A_\psi \cdot A_{\psi'}^{-1}, \end{aligned}$$

$\mathcal{E}_*$ essendo la base canonica di $\mathbb{K}^*$. Riassumendo, abbiamo

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^n \arrow[r, "A'_f"] \arrow[d, "P"'] & \mathbb{K}^m \arrow[d, "Q"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "A_f"] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

da cui $\boxed{A_f P = Q A'_f}$.

La fattorizzazione di P e Q vista sopra ci dà tutte le informazioni su tali matrici.

Matrici di cambiamento di base

Infatti, tenuto a mente che ogni applicazione lineare è completamente determinata dalla sua azione sui vettori di una base del dominio, allora la n-upla ordinata $(\phi \circ \phi'^{-1})(e_j)$, e cioè la j-esima colonna di P, vale

$$(\phi \circ \phi'^{-1})(e_j) = \phi(\phi'^{-1}(e_j)) = \phi(v'_j),$$

quindi è formata dalle coordinate del j-esimo vettore v'_j della base $\mathcal{V}'$ espresso rispetto alla base $\mathcal{V}$. In definitiva:

nelle notazioni di sopra, abbiamo

$$\boxed{P = \mathrm{Mat}(\mathrm{id}_V; \mathcal{V}', \mathcal{V})},$$

cioè P è la matrice di cambiamento di base in V dalla base $\mathcal{V}'$ alla base $\mathcal{V}$.

Analogamente,

- Q è la matrice di cambiamento di base in W da $\mathcal{W}'$ a $\mathcal{W}$;
- P^{-1} è la matrice di cambiamento di base in V da $\mathcal{V}$ a $\mathcal{V}'$;
- Q^{-1} è la matrice di cambiamento di base in W da $\mathcal{W}$ a $\mathcal{W}'$.

Matrici di cambiamento di base

Osservazione

Le matrici di cambiamento di base servono per interpretare, nel contesto degli spazi vettoriali finitamente generati, l'ovvio diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_V"'] & W \arrow[d, "\mathrm{id}_W"] \\ V \arrow[r, "f"] & W \end{tikzcd}$$

dato da una arbitraria applicazione lineare $f\colon V \to W$. Infatti, tale diagramma è commutativo indipendentemente dalle basi scelte per V e W; tuttavia, la sola f non "vede" su di sé l'effetto di un cambio di base. Fissate delle basi $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$ e $\mathcal{W}, \mathcal{W}'$ come sopra, solamente rappresentando f tramite le matrici risultanti A_f ed $A_{f'}$ e costruendo le matrici di cambiamento di base P e Q possiamo comprendere concretamente come si comporta f rispetto alle basi fissate. In altre parole, l'identità banale $f = f$ si traduce come

$$A_f P = Q A'_f \ .$$

Matrici di cambiamento di base

Teorema

Siano $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare, $n = \dim V$, $m = \dim W$, ed $r = \operatorname{rk} f$. Esistono basi $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V e $\{w_1, \dots, w_m\}$ di W rispetto alle quali f si rappresenta tramite la matrice a blocchi

$$D_r = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione. Dato che $r = \operatorname{rk} f$, allora $\operatorname{Ker} f$ ha dimensione $n - r$. Sia $\{u_1, \dots, u_{n-r}\}$ una base del nucleo, e completiamola ad una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_{n-r}\}$ per V. Sia ora $w_i := f(v_i)$, per $i = 1, \dots, r$. L'insieme $\{w_1, \dots, w_r\}$ genera $\operatorname{Im} f$; con l'usuale argomento, si verifica che è pure linearmente indipendente, dunque è una base dell'immagine. Completandolo ad una base $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_m\}$ per W, con la costruzione fatta otteniamo che la matrice A_f che rappresenta f nelle basi $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ è della forma enunciata. □

Matrici equivalenti

Definizione

Due matrici $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ si dicono equivalenti se rappresentano la stessa applicazione lineare $f \colon V \to W$ rispetto a basi diverse. Equivalentemente, se esistono matrici invertibili $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ e $Q \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ tali che

$$QA = BP \, .$$

Un'equivalenza per $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ si ricava dalla commutatività del seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P"'] & \mathbb{K}^m \arrow[d, "Q"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "B"] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}$$

per opportune matrici invertibili P, Q, da cui

$$A = Q^{-1}BP \quad \text{oppure} \quad B = QAP^{-1} \, .$$

Matrici equivalenti

Si verifica immediatamente che quella di equivalenza tra matrici è una relazione di equivalenza sull'insieme $M_{m,n}(\mathbb{K})$. Dato che, per il precedente teorema, ogni matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ di rango r è equivalente ad una matrice a blocchi $\left(\begin{smallmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, per transitività deduciamo il seguente:

Corollario

Due matrici sono equivalenti se, e solo se, hanno lo stesso rango.

Nel seguito saremo interessati al seguente caso particolare di equivalenza.

Definizione

Due matrici quadrate $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ si dicono simili se esiste una matrice invertibile $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tale che

$$AS = SB \, .$$

Corollario

Due matrici $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ sono simili se, e solo se, rappresentano lo stesso endomorfismo $f \colon V \to V$ di uno spazio vettoriale di dimensione n.

Matrici di cambiamento di base

Esempio

Consideriamo la base $\mathcal{V} = \{(1,1,1)^T, (2,3,3)^T, (3,4,5)^T\}$ di $\mathbb{R}^3$ e determiniamo
$$Q := \mathrm{Mat}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{E}_3, \mathcal{V}),$$
matrice di cambiamento di base dalla base canonica di $\mathbb{R}^3$ a $\mathcal{V}$.

Bisogna risolvere i tre sistemi $e_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$ nelle incognite $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, per $i = 1, 2, 3$, cioè
$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = \delta_{1i} \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 = \delta_{2i} \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 5\lambda_3 = \delta_{3i}, \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} e_1 = 3v_1 - v_2 \\ e_2 = -v_1 + 2v_2 - v_3 \\ e_3 = -v_1 - v_2 + v_3, \end{cases}$$
e quindi
$$Q = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrici di cambiamento di base

Sia ora $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ rappresentata da $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ rispetto alle basi canoniche (cioè $A = \mathrm{Mat}(f; \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_2)$). Determiniamo

$$A' = \mathrm{Mat}(f; \mathcal{V}, \mathcal{B}),$$

dove $\mathcal{B} = \{(2,3)^T, (1,2)^T\}$. Possiamo sfruttare la seguente fattorizzazione di A':

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}(f; \mathcal{V}, \mathcal{B}) &= \mathrm{Mat}(f; \mathcal{E}_2, \mathcal{B}) \cdot \mathrm{Mat}(f; \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_2) \cdot \mathrm{Mat}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{V}, \mathcal{E}_3) \\
&= \mathrm{Mat}(f; \mathcal{B}, \mathcal{E}_2)^{-1} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -2 \\ 0 & 8 & 3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$