Fondamenti di algebra lineare e geometria

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica (Canale 2)

Lorenzo Martini

Università degli Studi di Padova

A.A. 2023-2024

Lezione 16

Richiamo della lezione precedente

- Applicazioni lineari.
- Isomorfismi lineari.
- Matrice di una applicazione lineare.

Rappresentazione delle applicazioni lineari

Osservazione (Notazione)

Nella precedente lezione abbiamo dimostrato che, detto $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ lo spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ delle applicazioni lineari di V in W (la sua struttura di $\mathbb{K}$-spazio vettoriale è quella con somma e riscalamento puntuali; si verifichino gli assiomi di spazio vettoriale), allora la scelta di una base $\mathcal{V}$ per V e $\mathcal{W}$ per W istituisce un isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \xrightarrow{\cong} M_{m,n}(\mathbb{K})$$

che associa ad un'applicazione lineare $f: V \to W$ la matrice A_f che la rappresenta nelle basi scelte. In letteratura, la notazione piè completa e cioè che tenga traccia della dipendenza di A_f non solo da f, ma pure dalle basi $\mathcal{V}, \mathcal{W}$, è

$$M^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}(f),\ \mathrm{Mat}(f; \mathcal{V}, \mathcal{W}) \text{ e simili.}$$

Ricorreremo a tali notazioni solamente quando riguarderemo f rispetto a diverse basi sia per V che per W; se le basi sono chiare dal contesto, sarà sufficiente indicare la matrice che rappresenta f come A_f.

Esempio

Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_4 \\ 5x_2 - x_1 \\ 7x_3 \end{pmatrix}$$

Scrivere le matrici $\mathrm{Mat}(f; \mathcal{E}_4, \mathcal{E}_3)$ e $\mathrm{Mat}(f; \mathcal{E}_4, \mathcal{V})$, dove $\mathcal{E}_*$ è la base canonica di $\mathbb{R}^*$, e $\mathcal{V} = \{(1,2,0)^T, (0,1,1)^T, (0,0,3)^T\}$.

Occorre trovare i coefficienti delle combinazioni lineari che esprimono i quattro vettori $f(e_1), \ldots, f(e_4)$ di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente nelle basi $\mathcal{E}_3$ e $\mathcal{V}$.
Poiché

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

si ha

$$\mathrm{Mat}(f; \mathcal{E}_4, \mathcal{E}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rappresentazione delle applicazioni lineari

Le entrate delle colonne di $\mathrm{Mat}(f;\mathcal{E}_4,\mathcal{V})$ si ottengono invece risolvendo i quattro sistemi lineari ($j = 1,\ldots,4$):

$$f(e_j) = \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases}\lambda_1 = f(e_j)_1\\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = f(e_j)_2\\ \lambda_2 + 3\lambda_3 = f(e_j)_3\end{cases}$$

nelle incognite $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Si trova così che

$$\mathrm{Mat}(f;\mathcal{E}_4,\mathcal{V}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1\\ -3 & 5 & 0 & 2\\ 1 & -5/3 & 7/3 & -2/3\end{pmatrix}$$

È ora opportuno tradurre le nozioni insiemistiche sulle applicazioni lineari in termini matriciali. Premettiamo un primo punto generale (la prova è lasciata per esercizio).

Lemma

Se $f\colon U \to V$ e $g\colon V \to W$ sono applicazioni lineari, allora la loro composizione $g \circ f\colon U \to W$, $u \mapsto g(f(u))$ è lineare.

Rappresentazione delle applicazioni lineari

- Siano $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$ due applicazioni lineari. Qual è la matrice che rappresenta $g \circ f$ rispetto a basi fissate per U, V, W? Un calcolo diretto mostra che
$$\boxed{A_{g\circ f} = A_g \cdot A_f},$$
A_f ed A_g essendo le matrici che rappresentano f e g (si provi).
- Sia ora $f\colon V \to W$ è un isomorfismo, da cui $\dim V = \dim W$. Fissata una base per ciascuno degli spazi vettoriali, allora è facile vedere che A_f è una matrice invertibile, e che
$$\boxed{A_{f^{-1}} = A_f^{-1}}.$$
In altre parole, f^{-1} è rappresentata dalla matrice inversa di A_f rispetto alle stesse basi fissate (si ricordi che $f^{-1}\colon W \to V$).

Nucleo ed immagine

Introduciamo alcuni sottoinsiemi associati ad un'applicazione lineare.

Definizione

Sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare. I sottoinsiemi

$$\operatorname{Ker} f := \{v \in V \mid f(v) = \vec{0}\}$$

e

$$\operatorname{Im} f := \{f(v) \mid v \in V\}$$

sono detti rispettivamente nucleo ("ker" sta per kernel) e immagine di f.

È immediato verificare tramite linearità che nucleo ed immagine sono effettivamente sottospazi vettoriali:

Lemma

Data $f\colon V \to W$ lineare, allora

(i) $\operatorname{Ker} f$ è sottospazio vettoriale di V;

(ii) $\operatorname{Im} f$ è sottospazio vettoriale di W.

Nucleo ed immagine

La forma del nucleo e dell'immagine ci dice molte proprietà della funzione lineare associata. Vale infatti il seguente utilissimo criterio:

Proposizione

Sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare. Allora:

(i) f è iniettiva se e solo se $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$;

(ii) f è suriettiva se e solo se $\operatorname{Im} f = W$.

Dimostrazione. Dobbiamo provare solamente (i), poiché (ii) vale per qualsiasi applicazione insiemistica.
(i) Supponiamo che f sia iniettiva e dimostriamo che il suo nucleo consta solamente del vettore nullo. Sia v un vettore del nucleo, per cui $f(v) = \vec{0}$. Poiché è pure $\vec{0} = f(\vec{0})$, allora $f(v) = f(\vec{0})$, e per ipotesi di iniettività ricaviamo $v = \vec{0}$.
Viceversa, supponiamo che $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$ e verifichiamo che f è iniettiva. Siano dunque $v_1, v_2 \in V$ due vettori di V tali che $f(v_1) = f(v_2)$, e vediamo che $v_1 = v_2$. Dalla nostra ipotesi su v_1, v_2, per linearità otteniamo $\vec{0} = f(v_1) - f(v_2) = f(v_1 - v_2)$, cioè che il vettore $v_1 - v_2$ appartiene al nucleo, che essendo ridotto al vettore nullo dà $v_1 = v_2$. $\square$

Nucleo ed immagine

In altre parole, nucleo ed immagine di un'applicazione lineare $f\colon V \to W$ controllano intrinsecamente quanto f si distacca dall'essere un isomorfismo. Infatti, abbiamo già detto che due spazi vettoriali isomorfi sono sostanzialmente indistinguibili, nel senso che ad ogni vettore dell'uno corrisponde uno ed un solo vettore dell'altro; in particolare, al vettore nullo corrisponde unicamente il vettore nullo. Pertanto, $\operatorname{Ker} f$ ci dice quanti vettori di V vengono mappati in $\vec{0} \in W$, contemporaneamente che le immagini di questi vettori non daranno contributo ad $\operatorname{Im} f$, poiché coincidono identicamente con il vettore $\vec{0}$. In definitiva, quanto più grande è $\operatorname{Ker} f$, tanto più piccolo è $\operatorname{Im} f$, e viceversa.

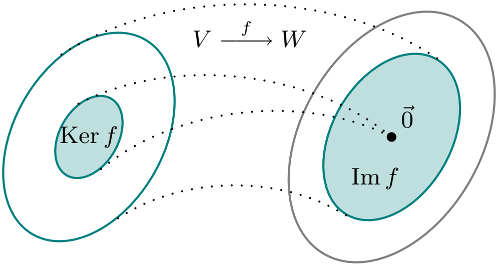

Immagine inversa

Data $f\colon V \to W$ lineare, per ogni $w \in W$ definiamo l'immagine inversa di w,

$$f^{\leftarrow}(w) := \{v \in V \mid f(v) = w\},$$

come l'insieme dei vettori di V che vengono mappati in w. Notiamo che:

- $f^{\leftarrow}(w) = \emptyset$ se e solo se $w \notin \operatorname{Im} f$;
- $\operatorname{Ker} f = f^{\leftarrow}(\vec{0})$;
- $f^{\leftarrow}(\vec{0})$ è l'unica immagine inversa ad essere un sottospazio vettoriale di V, dato che per ogni $\vec{0} \neq w \in \operatorname{Im} f$ si ha $\vec{0} \notin f^{\leftarrow}(w)$.

Sia ora $n = \dim V$ ed $m = \dim W$. Sappiamo che ad una scelta di una base per V e per W corrisponde una matrice $A := A_f$ che rappresenta f rispetto a tali basi: una volta identificato $v \in V$ con il vettore $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{K}^n$ delle sue coordinate nella base di V, abbiamo pure l'identificazione

$$f(v) = Ax,$$

che fornisce le coordinate in $\mathbb{K}^m$ di $w_0 := f(v)$ nella base di W fissata.

Applicazioni e sistemi lineari

Con tali identificazioni, vediamo che:

- $\operatorname{Ker} f$ coincide con il sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$ delle soluzioni del sistema lineare $Ax = 0$. In particolare, f è iniettiva se e solo se $Ax = \vec{0}$ ha come unica soluzione $x = \vec{0}$.
- $\operatorname{Im} f$ coincide con il sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^m$ generato dalle colonne di A. Infatti, abbiamo $\operatorname{Im} f = \langle f(v_i) \mid i = 1, \ldots, n \rangle$, da cui

  $$\dim(\operatorname{Im} f) = \operatorname{rk} A \ .$$

  In particolare, f è suriettiva se e solo se $\operatorname{rk} A = m$.
- Per ogni $w \in W$, $f^{\leftarrow}(w)$ coincide con l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $Ax = b$, b essendo il vettore delle coordinate di w. In particolare, dato $w \in W$, $f^{\leftarrow}(w) \neq \emptyset$ se e solo se $Ax = b$ ha soluzione.

Abbiamo poi la seguente caratterizzazione dell'immagine inversa e dunque dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare.

Applicazioni e sistemi

Proposizione

Sia $f\colon V \to W$ lineare. Per ogni $w \in W$ si ha

$$f^{\leftarrow}(w) = v_0 + f^{\leftarrow}(\vec{0}) := \{v_0 + v \mid v \in \operatorname{Ker} f\},$$

v_0 essendo un fissato elemento di $f^{\leftarrow}(w)$. Equivalentemente, le soluzioni di un sistema lineare $Ax = b$ sono date da

$$S(A, b) = x_0 + S(A, 0) = \{x_0 + c \mid Ac = 0\},$$

x_0 essendo una soluzione particolare di $Ax = b$.

Dimostrazione. Potremo supporre $w \in \operatorname{Im} f$, altrimenti ambo i membri coincidono con l'insieme vuoto. Dato che $w \in \operatorname{Im} f$, senz'altro esiste $v_0 \in V$ tale che $f(v_0) = w$, e lo fissiamo. Per ogni altro vettore $v \in f^{\leftarrow}(w)$ abbiamo allora $v = v_0 + v - v_0$, dove $v - v_0$ appartiene al nucleo di f, dato che $f(v - v_0) = f(v) - f(v_0) = w - w = \vec{0}$. Abbiamo così provato che $f^{\leftarrow}(w) \subseteq v_0 + f^{\leftarrow}(\vec{0})$. ⊳

Viceversa, sia $v_0 + v$ un elemento di $v_0 + \operatorname{Ker} f$, per cui $f(v) = \vec{0}$. Allora $f(v_0 + v) = f(v_0) + f(v) = w + \vec{0} = w$. Questo prova che $v_0 + f^{\leftarrow}(\vec{0}) \subseteq f^{\leftarrow}(w)$. $\square$

Osservazione

Con la precedente proposizione abbiamo introdotto in uno spazio vettoriale V la notazione $v + U$, v essendo un vettore di V ed U un suo sottospazio vettoriale. Come abbiamo già chiarito, $v + U$ <u>non</u> è un sottospazio vettoriale di V; né coincide con $\langle v \rangle + U$ (che invece lo è). In particolare, identificando V con un certo $\mathbb{K}^n$, allora $v + U$ è l'insieme che si ottiene da U traslando tutti i suoi elementi del vettore v. Sottoinsiemi di questo tipo (cioè traslati di sottospazi vettoriali) saranno studiati nell'ultima parte del corso, e sono detti sottospazi affini.

Nullità e rango

Abbiamo visto che la dimensione dell'immagine di un'applicazione lineare coincide con il rango della matrice che la rappresenta rispetto a due basi (qualsiasi) per dominio e codominio.

Definizione

Sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare. Definiamo:

- il rango di f come $\operatorname{rk} f := \dim(\operatorname{Im} f)$;
- la nullità di f come $\operatorname{null} f := \dim(\operatorname{Ker} f)$.

In particolare, f è suriettiva se e solo se ha rango massimo, mentre è iniettiva se e solo se ha nullità minima, cioè zero.

Siamo giunti al teorema più importante sugli spazi vettoriali finitamente generati.

Teorema "Nullità + Rango"

Sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare. Allora

$$\dim V = \operatorname{null} f + \operatorname{rk} f\ .$$

Teorema di nullità + rango

Dimostrazione. Poniamo $n = \dim V$. Sia $\{v_1, \ldots, v_k\}$ una base di $\operatorname{Ker} f$ e completiamola ad una base $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ per V.
Affermiamo che $\{f(v_{k+1}), \ldots, f(v_n)\}$ è una base per $\operatorname{Im} f$, da cui $\operatorname{rk} f = n - k$ e di qui la conclusione.
Senz'altro i vettori $f(v_{k+1}), \ldots, f(v_n)$ generano $\operatorname{Im} f$ (poiché f è completamente determinata dalla sua azione sui vettori di una base di V, ma $f(v_j) = \vec{0}$ per $j = 1, \ldots, k$); vediamo quindi che sono linearmente indipendenti. Sia

$$\alpha_{k+1} f(v_{k+1}) + \cdots + \alpha_n f(v_n) = \vec{0}$$

un'espressione di dipendenza lineare in W. Per linearità,

$$f(\alpha_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \alpha_n v_n) = \vec{0},$$

cioè $\alpha_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \alpha_n v_n \in \operatorname{Ker} f$, pertanto

$$\alpha_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \alpha_n v_n = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$$

per unici scalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$. L'ultima uguaglianza fornisce un'espressione di dipendenza lineare in V tra i vettori di una sua base, per cui ricaviamo $\alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_n = 0$, e abbiamo concluso. □

Teorema di nullità + rango

Corollario

Siano $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare e $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base per V.

(i) f è iniettiva se e solo se $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ è insieme linearmente indipendente in W;

(ii) f è suriettiva se e solo se $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ è insieme di generatori per W;

(iii) f è isomorfismo se e solo se $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ è una base di W.

Dimostrazione.

(i) La prova è analoga a quella del teorema, cioè segue direttamente dalla linearità di f, ed è lasciata per esercizio.

(ii) Supponiamo f suriettiva e dimostriamo che $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ genera W. Per ipotesi, abbiamo $W = \operatorname{Im} f$, cioè per ogni vettore $w \in W$ esite $v \in V$ tale che $w = f(v)$. Ora, abbiamo $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ per unici scalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, dunque per linearità di f ricaviamo $w = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n) \in \langle f(v_1), \ldots, f(v_n) \rangle$. Data l'arbitrarietà di w, abbiamo concludiamo. Il viceversa è banale. $\square$

Teorema di nullità + rango

Corollario

Sia $f\colon V \to V$ un'applicazione lineare di V in se stesso (f è detto un endomorfismo lineare). Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(a) f è iniettiva;

(b) f è suriettiva;

(c) f è biiettiva.

Dimostrazione. L'unica equivalenza non banale, (a) $\Leftrightarrow$ (b), segue dal teorema di nullità + rango: la nullità è minima se e solo se il rango è massimo. $\square$

Osservazione

Con il teorema di nullità + rango formalizziamo finalmente quanto anticipato sulla relazione tra numero di equazioni cartesiane e dimensione di un sottospazio vettoriale U di $\mathbb{K}^n$.

Teorema di nullità + rango

- Se $U = \langle u_1, \ldots, u_m \rangle$ (con $\dim U \le m \le n$), allora la matrice $A := (u_1 \quad \ldots \quad u_m)$ di $M_{n,m}(\mathbb{K})$ rappresenta un'opportuna applicazione lineare $f\colon \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$. Rispetto alla base di U estratta da $\{u_1, \ldots, u_m\}$ e alla base canonica di $\mathbb{K}^n$, tale f è l'inclusione (lineare) di U in $\mathbb{K}^n$, $f\colon u \mapsto u$, infatti
$$f(u_j) = u_j = \sum_{i=1}^{n} u_{ji} e_i \qquad \begin{aligned} j &= 1, \ldots, m \\ i &= 1, \ldots, n. \end{aligned}$$
Abbiamo quindi $\operatorname{Im} f = U$, da cui $\dim U = \operatorname{rk} f = \operatorname{rk} A$, e le equazioni cartesiane di U saranno in numero di $\operatorname{null} f = n - \dim U$.
- Se U è dato in forma cartesiana, allora $U = S(A, 0)$ per un'opportuna matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, il cui rango è il numero delle equazioni cartesiane di U. In altre parole, U coincide il nucleo dell'applicazione lineare $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f(x) = Ax$, da cui $\dim U = \operatorname{null} f = n - \operatorname{rk} f$.