Fondamenti di algebra lineare e geometria

Corso di Laurea in Ingegneria dell'Energia (Canale B)

Lorenzo Martini

Università degli Studi di Padova

A.A. 2023-2024

Lezione 15

Richiamo della lezione precedente

- Sottospazi vettoriali di $\mathbb{K}^n$. Applicazioni.
- Formula di Grassmann.
- Somma diretta di sottospazi vettoriali.

Applicazioni lineari

Ora che abbiamo introdotto gli spazi vettoriali (finitamente generati) e la nozione di dimensione, iniziamo lo studio delle applicazioni insiemistiche tra tali spazi che ne rispettano la struttura di spazio vettoriale.

Definizione

Sia $\mathbb{K}$ un campo e siano V, W due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali. Una applicazione lineare di V in W è un'applicazione $f\colon V \to W$ tale che

(L1) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ per ogni $v_1, v_2 \in V$;

(L2) $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ per ogni $v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

In altre parole, una applicazione $f\colon V \to W$ è lineare quando trasforma le somme di V in somme di W, e le moltiplicazioni scalari in V in moltiplicazioni scalari in W. Applicazioni lineari si chiamano anche omomorfismi di spazi vettoriali.

Equivalentemente, $f\colon V \to W$ è lineare se e solo se

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)$$

per ogni $v_1, v_2 \in V$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ (si provi).

Applicazioni lineari

Lemma

Sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare. Allora

(i) $f(\vec{0}) = \vec{0}$ (lo zero di V è mappato nello zero di W);

(ii) $f(-v) = -f(v)$ per ogni $v \in V$.

Dimostrazione. (i) Abbiamo $f(\vec{0}) = f(\vec{0}+\vec{0}) \overset{\text{L1}}{=} f(\vec{0}) + f(\vec{0})$, quindi cancellando $f(\vec{0})$ dai membri esterni concludiamo.
(ii) Grazie ad (i) abbiamo $\vec{0} = f(v-v) = f(v) + f(-v)$, quindi $f(-v) = -f(v)$ per unicità dell'opposto. □

Esempio

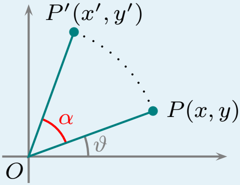
(1) Data $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, l'applicazione $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ definita ponendo

$$f(v) = Av$$

per ogni $v = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{K}^n$, è lineare. Infatti,

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) &:= A(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = A(\lambda_1 v_1) + A(\lambda_2 v_2) \\ &= \lambda_1 A v_1 + \lambda_2 A v_2 =: \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) \,. \end{aligned}$$

(2) In vista del precedente esempio, vediamo che nel piano $\mathbb{R}^2$ sono applicazioni lineari le simmetrie rispetto ad un asse cartesiano (e.g. $(x,y) \mapsto (-x,y)$), le proiezioni su di un asse (e.g. $(x,y) \mapsto (x,0)$) e le rotazioni di angolo α ($(x,y) \mapsto (x\cos\alpha - y\sin\alpha, x\sin\alpha + y\cos\alpha)$).



$$
\begin{aligned}
x &= \overline{OP}\,\cos\vartheta \\
y &= \overline{OP}\,\sin\vartheta \\
x' &= \overline{OP}\,\cos(\alpha+\vartheta) \\
y' &= \overline{OP}\,\sin(\alpha+\vartheta)\,.
\end{aligned}
$$

Infatti, tali applicazioni sono ottenute premoltiplicando $(x,y)^T$ rispettivamente per le seguenti matrici 2×2,

$$
\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.
$$

(3) Le funzioni $\cos, \sin, \exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non sono lineari (non sono additive).

(4) L'applicazione

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}[x]_{\leq 3} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ p(x) &\longmapsto (p(0), p(1))^T \end{aligned}$$

è lineare. Infatti, abbiamo

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x)) &= \begin{pmatrix} \lambda_1 p_1(0) + \lambda_2 p_2(0) \\ \lambda_1 p_1(1) + \lambda_2 p_2(1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 p_1(0) \\ \lambda_1 p_1(1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2 p_2(0) \\ \lambda_2 p_2(1) \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1 \begin{pmatrix} p_1(0) \\ p_1(1) \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} p_2(0) \\ p_2(1) \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1 f(p_1(x)) + \lambda_2 f(p_2(x)) \end{aligned}$$

per ogni coppia di polinomi $p_1(x), p_2(x)$ di grado al più tre e scalari $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

(5) Per ogni spazio vettoriale V, l'applicazione identica $\mathrm{id}_V : V \to V$, $v \mapsto v$, è lineare.

Applicazioni lineari

(6) Più in generale, tutte e sole applicazioni lineari $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ sono quelle in cui ciascuna delle m coordinate di un generico elemento $f(x_1, \ldots, x_n)$ è una combinazione lineare dell'insieme $\{x_1, \ldots, x_n\}$:

$$\underbrace{f_i(x_1, \ldots, x_n)}_{i\text{-esima componente di } f} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n, \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

per opportuni $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $j = 1, \ldots, n$. In particolare, tali f sono della forma $v \mapsto Av$ per una certa matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, come visto nell'esempio (1).

Quanto detto nell'esempio (6) sulla rappresentazione matriciale delle applicazioni lineari di $\mathbb{K}^n$ in $\mathbb{K}^m$ vale in tutta generalità. Vediamo infatti che fissati due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali V e W, di dimensione rispettivamente n ed m, allora ogni applicazione lineare $f\colon V \to W$ si può rappresentare come una matrice $m \times n$, e che questa matrice dipende dalla scelta di una base per V e W. Otterremo ciò come conseguenza del fatto che, a seguito di una scelta di una base, ogni spazio vettoriale n-dimensionale è identificabile con lo spazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$.

Isomorfismi lineari

Definizione

Un'applicazione lineare $f\colon V \to W$ si chiama isomorfismo (lineare) se f è biiettiva come applicazione insiemistica, cioè se esiste la sua inversa $f^{-1}\colon W \to V$.

Proposizione

Se $f\colon V \to W$ è un isomorfismo lineare, allora l'inversa $f^{-1}\colon W \to V$ è un'applicazione lineare (in particolare, un isomorfismo).

Dimostrazione. Ricordiamo che f ed f^{-1} sono legate dalle relazioni

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_V \quad \text{e} \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_W,$$

id_V ed id_W essendo le applicazioni (lineari) identiche su V e W. Ciò detto, dati $w_1, w_2 \in W$, per invertibilità di f^{-1} esistono unici in V elementi v_1, v_2 tali che $v_1 = f^{-1}(w_1)$ e $v_2 = f^{-1}(w_2)$. ⊳⊳

Isomorfismi lineari

Per linearità di f abbiamo ora

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$$

cioè

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2)) &= f(f^{-1}(w_1)) + f(f^{-1}(w_2)) \\ &= w_1 + w_2 \ . \end{aligned}$$

Applicando f^{-1}, troviamo finalmente

$$f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2) = f^{-1}(w_1 + w_2). \qquad \square$$

Due spazi vettoriali V e W sono detti isomorfi se esiste un isomorfismo tra di essi, e in tal caso si scrive $V \cong W$.

Spazi vettoriali isomorfi sono da ritenersi algebricamente indistinguibili: tutte le proprietà—di spazio vettoriale—dell'uno vengono trasmesse all'altro tramite l'isomorfismo (o il suo inverso). In altre parole, se $V \cong W$ tramite f, allora W è identificabile con V cambiando i nomi dei suoi vettori da v ad $f(v)$.

Isomorfismi lineari

Il seguente risultato sancisce che, fissato $n \in \mathbb{N}$, a meno di isomorfismo esiste solamente uno spazio vettoriale di dimensione n.
(L'argomento della dimostrazione è già stato usato precedentemente.)

Proposizione

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione n. Allora esiste un isomorfismo $V \cong \mathbb{K}^n$, dipendente dalla scelta di una base per V.

Dimostrazione. Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base per V. Un generico vettore $v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$ è completamente individuato dalla n-upla di coefficienti scalari $(x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{K}^n$. Detto più formalmente, l'applicazione

$$\begin{aligned} f \colon V &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ x_1v_1 + \cdots + x_nv_n &\longmapsto (x_1, \ldots, x_n)^T \end{aligned}$$

è evidentemente lineare e suriettiva, inoltre è iniettiva grazie alla lineare indipendenza di $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Pertanto, $V \cong \mathbb{K}^n$ tramite f, ed f dipende dalla scelta di una base di V. $\square$

Isomorfismi lineari

Definizione

Dati una base $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ ed un vettore $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$, allora la n-upla $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ si dice contenere le coordinate di v rispetto alla base data.

Si noti che nella precedente dimostrazione abbiamo tacitamente considerato $\mathbb{K}^n$ con la sua base canonica.

Esempio

Sia $d \in \mathbb{N}$. Rispetto alla base canonica $\{1, x, \dots, x^d\}$ di $\mathbb{K}[x]_{\leq d}$ (e alla base canonica $\{e_1, \dots, e_{d+1}\}$ di $\mathbb{K}^{d+1}$), abbiamo l'isomorfismo

$$\begin{aligned} \mathbb{K}[x]_{\leq d} &\xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^{d+1} \\ p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d &\longmapsto (a_0, a_1, \dots, a_d)^T \ . \end{aligned}$$

La precedente proposizione ci dice che tutti i $\mathbb{K}$-spazi vettoriali di dimensione n sono tra loro isomorfi (in quanto isomorfi allo stesso $\mathbb{K}^n$) ma in modo non canonico, poiché ciascun isomorfismo dipenderà dalla scelta di una base. In particolare:

Rappresentazione delle applicazioni lineari

Corollario

Due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

In particolare, per studiare gli spazi vettoriali finitamente generati su un campo $\mathbb{K}$ ci basterà guardare ai singoli $\mathbb{K}^n$, al variare di $n \in \mathbb{N}$.

Siano ora $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare, $n = \dim V$ ed $m = \dim W$. Vediamo che f è completamente determinata dal suo comportamento sui vettori di una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V, cioè dai vettori $f(v_j)$ di W. Infatti, detto $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$ un generico vettore di V, abbiamo

$$f(v) = f\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(v_j) \ .$$

Ciò detto, pure i vettori $f(v_j)$ di W saranno combinazione lineare dei vettori di una base di W. Scelta $\{w_1, \dots, w_m\}$ una tale base, per ogni $j = 1, \dots, n$ avremo $f(v_j) = a_{1j} w_1 + \cdots + a_{mj} w_m$ per unici scalari $a_{1j}, \dots, a_{mj} \in \mathbb{K}$.

Rappresentazione delle applicazioni lineari

In definitiva, rispetto alle basi di V e W fissate, $f\colon V \to W$ è completamente descritta dagli scalari $x_1, \ldots, x_n, a_{11}, \ldots, a_{mn}$ come

$$\begin{aligned} f(v) &= f\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(v_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i\Big) = \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\Big) w_i \ . \end{aligned}$$

In particolare,

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i \ .$$

Ora, la scelta delle basi per V e W induce gli isomorfismi $V \cong \mathbb{K}^n$ e $W \cong \mathbb{K}^m$, rispetto ai quali il vettore v si indentifica con $(x_1, \ldots, x_n)^T$, mentre i vettori $f(v_j)$ con $(a_{1j}, \ldots, a_{mj})^T$.

Rappresentazione delle applicazioni lineari

Di conseguenza, per effetto di tali isomorfismi possiamo rappresentare $f \colon V \to W$ come l'applicazione (lineare)

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}^m \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

cioè tramite la matrice $A := (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ costruita sopra. Si osservi che le colonne di A contengono ordinatamente le coordinate dei vettori $f(v_1), \dots, f(v_n)$ nella base di W fissata:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(v_1) & & f(v_j) & & f(v_n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Rappresentazione delle applicazioni lineari

La rappresentabilità di $f\colon V \to W$ tramite la matrice A si può schematizzare con il seguente diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\cong"'] & W \arrow[d, "\cong"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

dove le frecce verticali sono gli isomorfismi che dipendono dalle basi di V e W scelte.

Esempio

Le matrici viste nell'esempio (2) rappresentano, rispettivamente:

- la simmetria σ_y rispetto all'asse y;
- la proiezione π_x lungo l'asse x;
- la rotazione ϱ_α dell'angolo α,

purché sullo spazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ venga considerata la sua base canonica $\{e_1, e_2\}$.