Fondamenti di algebra lineare e geometria

Corso di Laurea in Ingegneria dell'Energia (Canale B)

Lorenzo Martini

Università degli Studi di Padova

A.A. 2023-2024

Lezione 14

Richiamo della lezione precedente

- Forme parametrica e cartesiana di sottospazi vettoriali di $\mathbb{K}^n$.

Intersezione e somma di sottospazi di $\mathbb{K}^n$

Concluderemo oggi la trattazione dei sottospazi vettoriali in $\mathbb{K}^n$. Abbiamo visto come ottenere basi e dimensione dalla forma parametrica o dalla forma cartesiana di tali sottospazi. Restano però da discutere questi aspetti per intersezioni e somme di sottospazi.

Siano U, W sottospazi vettoriali di $\mathbb{K}^n$. Possiamo calcolare dimensione e basi per $U \cap W$ in due modi distinti:

- Se conosciamo le equazioni cartesiane di U e W, allora $U \cap W$ avrà come equazioni cartesiane quelle di U messe a sistema con quelle di W. (Ciò è coerente con quanto anticipato sul numero di equazioni cartesiane di un sottospazio vettoriale $U \subseteq \mathbb{K}^n$, e cioè $n - \dim U$: tanto più è grande U, quante meno sono le sue equazioni cartesiane, e viceversa.)
- Se conosciamo le equazioni parametriche di U e W, allora ricaviamo quelle di $U \cap W$, come segue. Supponiamo $U = \langle u_1, \ldots, u_r \rangle$ e $W = \langle w_1, \ldots, w_t \rangle$; a questo punto, possiamo supporre che sia $r = \dim U$ e $t = \dim W$.

Intersezione di sottospazi di $\mathbb{K}^n$

Un generico vettore $v \in U \cap W$ si dovrà poter scrivere, in modo unico, come combinazione lineare sia dei vettori della base di U che di quelli della base di W. Cioè, esistono unici scalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ e $\mu_1, \ldots, \mu_t \in \mathbb{K}$ tali che

$$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_r u_r = \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + \cdots + \mu_t w_t \ .$$

Uguagliando membro a membro le equazioni parametriche in $\mathbb{K}^n$ che otteniamo dall'essere, contemporaneamente, $v \in U$ e $v \in W$, ricaviamo le equazioni parametriche di $U \cap W$.

Esempio

Consideriamo in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi vettoriali

$$U = \langle (1,1,0,-2)^T,\ (2,0,1,-1)^T,\ (1,-3,2,4)^T \rangle,$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ \middle|\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \right\} .$$

Determiniamo dimensione e base di $U \cap W$.

Intersezione di sottospazi di $\mathbb{K}^n$

Decidiamo di procedere con il secondo metodo esposto sopra, quindi dobbiamo ricavare i generatori di W.

Si verifichi per esercizio che $\dim U = 2$; una base di U si ottiene rimuovendo uno qualsiasi dei generatori dati, ad esempio il terzo:

$$U = \langle \overbrace{(1, 1, 0, -2)^T}^{u_1}, \overbrace{(2, 0, 1, -1)^T}^{u_2} \rangle,$$

e si verifichi che $\dim W = 3$, in particolare:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 2x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \langle \underbrace{(2, 1, 0, 0)^T}_{w_1}, \underbrace{(-1, 0, 1, 0)^T}_{w_2}, \underbrace{(0, 0, 0, 1)^T}_{e_4} \rangle \,.$$

Verificato ciò, per determinare $U \cap W$ possiamo uguagliare membro a membro le equazioni parametriche di U e di W in $\mathbb{R}^4$, ottenendo...

che per un generico vettore $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + \mu_3 e_4$, i parametri sono legati dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 2\mu_1 - \mu_2 \\ \lambda_1 = \mu_1 \\ \lambda_2 = \mu_2 \\ -2\lambda_1 - \lambda_2 = \mu_3 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} \lambda_1 = \mu_1 = 3\lambda_2 \\ \mu_2 = \lambda_2 \\ \mu_3 = -7\lambda_2 \\ (\lambda_2 \in \mathbb{R}), \end{cases}$$

e dunque

$$\begin{aligned} U \cap W &= \{3\lambda_2 w_1 + \lambda_2 w_2 - 7\lambda_2 e_4 \mid \lambda_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 5\lambda_2 \\ 3\lambda_2 \\ \lambda_2 \\ -7\lambda_2 \end{pmatrix} \middle| \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} = \langle \underbrace{(5, 3, 1, -7)^T}_{v_1} \rangle, \end{aligned}$$

cioè $\dim U \cap W = 1$. (Come possiamo verificare che in effetti $v_1 \in U$?)

Si ripeta l'esempio determinando le equazioni cartesiane di U e mettendole a sistema con quella di W.

Somma di sottospazi di $\mathbb{K}^n$

Per quanto concerne basi, forma parametrica e forma cartesiana di $U + W \subseteq \mathbb{K}^n$,

- le equazioni cartesiane di U e W non forniscono informazioni dirette su quelle di $U + W$; occorre lavorare con i generatori dei due sottospazi, come discutiamo nel seguente punto.
- Noti i generatori di U e W, diciamoli $\{u_1, \ldots, u_r\}$ e $\{w_1, \ldots, w_t\}$ rispettivamente, allora per determinare la dimensione di $U + W$ possiamo calcolare il rango della matrice formata da tali generatori. Ora, per definizione, l'insieme $\{u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_t\}$ genera tutto $U + W$, pertanto ne contiene una base. Occorre quindi trovare un'espressione di dipendenza lineare tra tutti i generatori di U e di W, al fine di individuare una base per $U + W$. Abbiamo già visto come risolvere questo problema utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss, e lo ricordiamo nel seguente esempio.

Intersezione e somma di sottospazi di $\mathbb{K}^n$

Esempio

Siano $U, W \subseteq \mathbb{R}^4$ come nel precedente esempio, e determiniamo dimensione e base di $U + W$.

Il rango della matrice $A := (u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad e_4)^T$ uguaglia la dimensione di $U + W$, che si verifica valere 4. Poiché siamo in $\mathbb{R}^4$, otteniamo l'uguaglianza $U + W = \mathbb{R}^4$, dunque una base di $U + W$ potrebbe essere quella canonica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.
Come abbiamo già visto, una relazione di dipendenza lineare tra i cinque generatori di $U + W$ si trova portando in forma a scala la parte sinistra del blocco $(A \mid \mathbb{1}_5)$ e guardando alle righe sotto la scala nel blocco di destra risultante. Nel nostro caso abbiamo

$$\left(\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -2 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -3 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -3 & -1 & 7 \end{array}\right)$$

e quindi $3u_1 + u_2 - 3w_1 - w_2 + 7e_4 = \vec{0}$.

Formula di Grassmann

In generale, la dimensione di intersezione e somma di due sottospazi vettoriali U, W di un arbitrario $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V sono controllate dal seguente risultato.

Formula di Grassmann

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Dati comunque due sottospazi vettoriali U, W, si ha

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) .$$

Dimostrazione. Sia $\{v_1, \ldots, v_k\}$ una base di $U \cap W$. Possiamo estendere tale base ad:

- una base $\{v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_r\}$ di U (da cui $\dim U = k + r$);
- una base $\{v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_t\}$ di W (da cui $\dim W = k + t$).

È immediato verificare che l'insieme

$$\{u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_t\}$$

genera tutto $U + W$; affermiamo ora che è linearmente indipendente.

Formula di Grassmann

Si noti che, una volta provata l'affermazione, concluderemo la dimostrazione poiché avremo

$$\begin{aligned}\dim(U+W) &= r+k+t = (r+k)+(t+k)-k \\ &= \dim U + \dim W - \dim(U\cap W)\ .\end{aligned}$$

Sia

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_k v_k + \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_t w_t = \vec{0}$$

un'espressione di dipendenza lineare in $U+W$. Abbiamo allora

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_k v_k = -\gamma_1 w_1 - \cdots - \gamma_t w_t,$$

i cui membri forniscono un vettore v_0 di $U\cap W$. Ora, dovendosi v_0 scrivere in modo unico come combinazione lineare di $\{v_1,\ldots,v_k\}$, ed essendo gli insiemi $\{v_1,\ldots,v_k,u_1,\ldots,u_r\}$ e $\{v_1,\ldots,v_k,w_1,\ldots,w_t\}$ linearmente indipendenti per costruzione, ricaviamo

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0 \quad \text{e} \quad \gamma_1 = \cdots = \gamma_t = 0,$$

da cui $\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_k v_k = \vec{0}$, quindi $\beta_1 = \cdots = \beta_k = 0$ per indipendenza lineare dei vettori in $U\cap W$. $\square$

Somma diretta di sottospazi vettoriali

Definizione

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Due sottospazi vettoriali U e W si dicono in somma diretta se $U \cap W = \{\vec{0}\}$. In questo caso, la loro somma $U + W$ si chiama somma diretta e si indica col simbolo $U \oplus W$.

Grazie alla formula di Grassmann, per due sottospazi vettoriali in somma diretta abbiamo

$$\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W \ .$$

Di più, vale il seguente semplice ma utilissimo fatto.

Lemma

Siano U, W sottospazi vettoriali in somma diretta. Allora l'espressione di ogni vettore di $U \oplus W$ nella forma $u + w$, con $u \in U$ e $w \in W$, è unica.

Dimostrazione. Sappiamo che $U \oplus W = \{u + w \mid u \in U,\ w \in W\}$. Se fosse $u + w = u' + w'$, con $u' \in U$ e $w' \in W$, allora $u - u' = w' - w$ sarebbe un vettore di $U \cap W$, cioè il vettore nullo, Quindi $u - u' = \vec{0}$ e $w - w' = \vec{0}$, da cui l'uguaglianza delle due scritture. $\square$

Somma diretta di sottospazi vettoriali

Più in generale, m sottospazi vettoriali $U_1, \ldots, U_m$ di V sono detti in somma diretta se per ogni $i = 1, \ldots, m$ si ha

$$U_i \cap \left(\sum_{\substack{j=1,\ldots,m \\ j \neq i}} U_j \right) = \{\vec{0}\} \ .$$

In questo caso, la loro somma

$$\sum_{i=1}^{m} U_i = U_1 + U_2 + \cdots + U_m = \{\sum_{i=1}^{m} u_i \mid u_i \in U_i \ \forall i = 1, \ldots, m\}$$

si dice somma diretta e si indica con

$$\bigoplus_{i=1}^{m} U_i := U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_m \ .$$

Corollario

Siano $U_1, \ldots, U_m$ sottospazi vettoriali in somma diretta. Allora l'espressione di ogni vettore di $\bigoplus_{i=1}^{m} U_i$ nella forma $\sum_{i=1}^{m} u_i$, con $u_i \in U_i$ per ogni $i = 1, \ldots, m$, è unica.