Fondamenti di algebra lineare e geometria

Corso di Laurea in Ingegneria dell'Energia (Canale B)

Lorenzo Martini

Università degli Studi di Padova

A.A. 2023-2024

Lezione 13

Richiamo della lezione precedente

- Sottospazi vettoriali di $\mathbb{K}^n$ dati da generatori.
- Rango di una matrice.

Sottospazi vettoriali di $\mathbb{K}^n$

Nella precedente lezione abbiamo trattato sottospazi vettoriali di $\mathbb{K}^n$ descritti dai propri generatori: basi e dimensione si ottengono calcolando il rango della matrice A che tali generatori costituiscono; per determinare il rango di A, possiamo ridurre la matrice in forma a scala.

Si dice che tali sottospazi sono descritti da equazioni parametriche. Infatti, dato $U = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle \subseteq \mathbb{K}^n$, allora, per ogni $i = 1, \ldots, m$, si ha

$$v_i = \begin{pmatrix} a_{1i} & a_{2i} & \ldots & a_{ni} \end{pmatrix}^T$$

per opportuni $a_{ji} \in \mathbb{K}$, da cui

$$\begin{aligned} U &= \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K}\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \cdots + \lambda_m a_{1m} \\ \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \cdots + \lambda_m a_{2m} \\ \vdots \\ \lambda_1 a_{n1} + \lambda_2 a_{n2} + \cdots + \lambda_m a_{nm} \end{pmatrix} \middle| \ \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K} \right\}. \end{aligned}$$

Sottospazi vettoriali di $\mathbb{K}^n$

Pertanto, un generico vettore $v = (x_1, \ldots, x_n)^T$ di $\mathbb{K}^n$ appartiene ad U se e solo se esistono scalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ tali che

$$\begin{cases} x_1 &= \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \cdots + \lambda_m a_{1m} \\ x_2 &= \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \cdots + \lambda_m a_{2m} \\ &\vdots \\ x_n &= \lambda_1 a_{n1} + \lambda_2 a_{n2} + \cdots + \lambda_m a_{nm}. \end{cases}$$

Al variare delle $n + m$ incognite $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ otteniamo il sistema delle equazioni parametriche di U.
Se esplicitiamo le incognite (parametriche) $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ in funzione delle incognite (cartesiane, cioè di $\mathbb{K}^n$) $x_1, \ldots, x_n$, troveremo il sistema

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n &= 0 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ b_{s1}x_1 + b_{s2}x_2 + \cdots + b_{sn}x_n &= 0, \end{cases}$$

per opportuni $s \in \mathbb{N}$ e scalari b_{ij}, contenente le equazioni cartesiane di U.

Sottospazi vettoriali di $\mathbb{K}^n$

Osservazione (Importante)

Con il già annunciato teorema più importante sugli spazi vettoriali finitamente generati, verificheremo che il (massimo) numero t delle equazioni cartesiane di U linearmente indipendenti vale $n - \dim U$.

Pertanto, la forma cartesiana di $U \subseteq \mathbb{K}^n$ contiene delle equazioni lineari le cui soluzioni sono tutti e soli i vettori di U, cioè caratterizza quest'ultimo come lo spazio delle soluzioni di opportune equazioni lineari. Di fatto, abbiamo già incontrato sottospazi vettoriali di $\mathbb{K}^n$ scritti in forma cartesiana: tali sono gli insiemi delle soluzioni dei sistemi lineari $Ax = 0$, per qualsiasi $A = (a_{ij})$ in $M_{m,n}(\mathbb{K})$, con $m \in \mathbb{N}$. (La verifica che $S(A, 0)$ è un sottospazio vettoriale è facile e lasciata per esercizio.)

Osservazione

Si osservi che data $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, se $b = (b_1, \dots, b_m)^T$ è un vettore non nullo allora l'insieme $S(A, b)$ delle soluzioni del sistema lineare $Ax = b$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$ (si motivi).

Esempio

Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$u_1 = (1,2,3,0)^T, \qquad u_2 = (2,3,4,-1)^T \ .$$

Troviamo le equazioni cartesiane di U.

Osserviamo preliminarmente che $\dim U = 2$. (Lo abbiamo solo anticipato, ma dobbiamo aspettarci $\dim \mathbb{R}^4 - \dim U = 2$ equazioni cartesiane.)
Un generico vettore $v = (x_1, \ldots, x_4)^T$ di $\mathbb{R}^4$ appartiene ad $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ se e solo se esistono scalari $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tali che $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$, cioè se

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ x_2 = 2\lambda_1 + 3\lambda_2 \\ x_3 = 3\lambda_1 + 4\lambda_2 \\ x_4 = -\lambda_2. \end{cases}$$

Le equazioni cartesiane di U sono le (sole) equazioni tra le precedenti in cui non compaiono più i parametri λ_1, λ_2 a seguito dell'espressione di questi come combinazione lineare delle incognite x_1, x_2, x_3, x_4.

Il parametro λ_2 è già funzione di x_4, sostituendo $\lambda_2 = -x_4$ in una qualsiasi delle prime tre equazioni possiamo ricavare λ_1 in funzione di x_4 e di un'altra incognita. Ad esempio, lavorando sulla prima equazione, otteniamo

$$\begin{cases} \lambda_1 = x_1 + 2x_4 \\ \boxed{\begin{array}{l} x_2 = 2(x_1 + 2x_4) - 3x_4 \\ x_3 = 3(x_1 + 2x_4) - 4x_4 \end{array}} \\ \lambda_2 = -x_4, \end{cases}$$

da cui

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$

Si osservi che dai precedenti sistemi possiamo ottenere immediatamente nuovi generatori (in questo caso, una nuova base) di U.

Un altro metodo per determinare le equazioni cartesiane di U a partire dai suoi generatori è il seguente. Consideriamo la matrice

$$A := (u_1 \quad u_2 \quad x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 2 & 3 & x_2 \\ 3 & 4 & x_3 \\ 0 & -1 & x_4 \end{pmatrix},$$

formata dai generatori di U e dal vettore incognito $v = (x_1, \ldots, x_4)^T$. Imponendo che sia $\operatorname{rk} A = 2$, troveremo un'espressione di dipendenza lineare dell'ultima colonna dalle prime due, cioè di v da u_1 e u_2. In particolare, otterremo le equazioni cartesiane di U annullando tutte le entrate delle ultime due righe della forma a scala di A, cioè

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & -1 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 0 & 0 & 2x_1 - x_2 + x_4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Si noti che abbiamo ottenuto una diversa forma cartesiana di U.

Esempio

Determinare le equazioni parametriche di U note quelle cartesiane è piuttosto semplice. Ad esempio, sia

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} x_1 - 5x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$

Essendo U descritto da due equazioni in quattro incognite, avrà dimensione 2, poiché tale è il numero di incognite libere di variare. In effetti, possiamo scegliere

$$\begin{cases} x_1 = 5x_3 \\ x_4 = x_2 - x_3, \end{cases}$$

cioè di esplicitare le incognite in funzione di x_2 e x_3. A questo punto, basterà sostituire una coppia di valori a queste ultime per individuare una base di U:

$$U = \left\langle (0, 1, 0, 1)^T, (5, 0, 1, -1)^T \right\rangle .$$

Sottospazi vettoriali di $\mathbb{K}^n$

Concludiamo con un esempio visto nella precedente lezione.

Esempio

Nella precedente lezione abbiamo visto che dei cinque vettori di $\mathbb{R}^5$

$$
\begin{aligned}
u_1 &= (1, -3, 0, 2, 1)^T, & u_2 &= (3, 1, 1, -1, 2)^T, \\
u_3 &= (0, 2, -2, 0, 1)^T, & u_4 &= (4, 0, -1, 1, 4)^T, \\
u_5 &= (2, -8, 2, 4, 1)^T,
\end{aligned}
$$

generano uno spazio vettoriale U di dimensione 3. Come possiamo individuare un'espressione di dipendenza lineare per i cinque generatori, senza risolvere il sistema lineare $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_5 u_5 = \vec{0}$?

Sia di nuovo $A = (u_1, \ldots, u_5)^T$, e utilizziamo il metodo di eliminazione di Gauss su $(A \mid \mathbb{1}_5)$, ottenendo nel blocco di sinistra una forma a scala A' di A (come nella precedente lezione), mentre nel blocco di destra la matrice invertibile B tale che $BA = A'$. Poiché le righe di A' si ottengono moltiplicando le righe di B per i generatori di U (eventualmente trasposti), otteniamo che le ultime due righe di B contengono i coefficienti di un'espressione di dipendenza lineare tra i generatori di U.

Abbiamo (rifacendo le stesse operazioni elementari della scorsa lezione; si verifichi):

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & -3 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & -7 & -6 & -3 & 1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

Le ultime due righe del blocco di destra ci dicono che

$$\begin{cases} -u_1 - u_2 - u_3 + u_4 = 0 \\ -2u_1 + u_3 + u_5 = 0, \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} u_4 = u_1 + u_2 + u_3 \\ u_5 = 2u_1 - u_3. \end{cases}$$

Concludiamo la lezione con un'applicazione diretta del teorema di Rouché–Capelli visto nella precedente lezione, che afferma che un sistema lineare arbitrario $Ax = b$ è compatibile se e solo se $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(A \mid b)$.

Esempio

Determiniamo per quali valori del parametro $t \in \mathbb{R}$ il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + tx_2 + x_3 - x_5 = t \\ 2x_1 + 2tx_2 + (t+1)x_3 + 2x_4 + (t-2)x_5 = 3t \\ -x_1 - tx_2 - x_3 + (t+1)x_4 + 2x_5 = -t \\ (t-1)x_3 + 2x_4 + (2t+1)x_5 = 3t \end{cases}$$

ammette soluzioni.

Poiché dobbiamo calcolare il rango delle matrici incompleta e completa del sistema lineare dato, possiamo portare in forma a scala direttamente la matrice completa dei coefficienti, cioè

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & t & 1 & 0 & -1 & t \\ 2 & 2t & t+1 & 2 & t-2 & 3t \\ -1 & -t & -1 & t+1 & 2 & -t \\ 0 & 0 & t-1 & 2 & 2t+1 & 3t \end{array}\right).$$

Sistemi lineari

Una forma a scala è la seguente

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & t & 1 & 0 & -1 & t \\ 0 & 0 & \boxed{t-1} & 2 & t & t \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{t+1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{t+1} & 2t \end{array}\right)$$

per cui le entrate evidenziate sono effettivamente pivot se e solo se $t \neq \pm 1$. In tal caso, il teorema di Rouché–Capelli garantisce l'esistenza di soluzioni. Rimangono da analizzare singolarmente i casi $t = -1$ e $t = 1$. I sistemi lineari risultanti sono, rispettivamente,

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \quad \text{e} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right),$$

e il teorema di Rouché–Capelli ne sancisce l'incompatibilità (per l'ultimo sistema, occorre fare una somma ed uno scambio di righe per riportarlo in forma a scala, e concludere).