Fondamenti di algebra lineare e geometria

Corso di Laurea in Ingegneria dell'Energia (Canale B)

Lorenzo Martini

Università degli Studi di Padova

A.A. 2023-2024

Lezione 12

Richiamo della lezione precedente

- Basi di uno spazio vettoriale.
- Ogni spazio vettoriale ammette una base.
- Da un insieme linearmente indipendente è possibile estrarre una base.
- Tutte le basi di uno spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi, detto dimensione.

Sottospazi vettoriali di $\mathbb{K}^n$

Come visto nell'ultimo esempio della precedente lezione, per determinare la dimensione di un sottospazio vettoriale U di $\mathbb{K}^n$, di cui conosciamo i generatori, si potrebbe dover risolvere un certo numero di sistemi lineari. Noi invece vorremmo fare meno calcoli possibile.

Come ora vedremo, possiamo individuare la dimensione ed una base di tali U andando a lavorare direttamente sulla matrice dei coefficienti del sistema lineare omogeneo dato dall'espressione di dipendenza lineare dei suoi generatori. In effetti, tale matrice non è altro che la matrice le cui colonne sono i generatori del sottospazio U: nel precedente esempio,

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 7 & 5 \\ -1 & -3 & -6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Evidentemente, quello che vorremmo ottenere è un legame tra dimensione di U e numero di pivot di una forma a scala della matrice appena descritta.

Rango di una matrice

Definizione

Sia $\mathbb{K}$ un campo. Si chiama rango per colonne di una matrice $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ la dimensione del sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^m$ generato dalle sue colonne:

$$\mathrm{rk}_c\, A := \dim\langle (a_{ij})_{i=1,\dots,m} \mid 1 \leq j \leq n \rangle$$

(rk sta per l'inglese "rank", c sta per "colonna".) Quindi, $\mathrm{rk}_c\, A$ è il massimo numero di colonne linearmente indipendenti in A.

Evidentemente, possiamo pure definire il rango per righe di A come la dimensione del sottospazio di $\mathbb{K}^n$ generato dalle righe di A:

$$\mathrm{rk}_r\, A := \dim\langle (a_{ij})_{j=1,\dots,n} \mid 1 \leq i \leq m \rangle\ .$$

Come ora vedremo, non dovremo distinguere tra rango per colonne e rango per righe, poiché questi coincidono per ogni matrice $m \times n$, e potremo indicarli semplicemente con $\mathrm{rk}\, A$.

Rango di una matrice

Teorema

Per ogni matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ si ha $\mathrm{rk}_c\, A = \mathrm{rk}_r\, A$.

Dimostrazione. Siano $c := \mathrm{rk}_c\, A$ e $r := \mathrm{rk}_r\, A$. Se $r = 0$, allora A è la matrice nulla e di conseguenza $c = 0$. Sia dunque $r > 0$. La seguente osservazione è di fondamentale importanza.

Scriviamo la matrice A esplicitandone le colonne: $A = (C_1 \quad \dots \quad C_n)$; vediamo così che una qualsiasi espressione di dipendenza lineare delle colonne,

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_n C_n = C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2 + \cdots + C_n \lambda_n = \vec{0},$$

altro non è che una soluzione del sistema lineare omogeneo $Ax = 0$. In altre parole, il rango per colonne è determinato dall'insieme $S(A, 0)$ delle soluzioni di $Ax = 0$.

Rango di una matrice

Poiché scambi di righe in A non modificano l'insieme delle soluzioni di $Ax = 0$, possiamo supporre che le r righe linearmente indipendenti di A siano proprio le prime r; in questo modo, le ultime $m - r$ righe sono combinazioni lineari delle prime r, e pertanto $Ax = 0$ è equivalente al sistema $A'x = 0$, dove

$$A' = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_r \end{pmatrix} \in M_{r,n}(\mathbb{K}) \, .$$

In forza di questa equivalenza, per l'osservazione fatta sopra pure l'insieme $S(A', 0)$ individua il rango per colonne c di A, cioè $c = \operatorname{rk}_c A'$. Siamo però ora in presenza di una matrice le cui colonne sono elementi di $\mathbb{K}^r$, e quindi si ha senz'altro $c \leq r$, grazie al lemma di scambio.
La disuguaglianza $r \leq c$, cioè la conclusione della dimostrazione, si ottiene ripetendo il ragionamento di sopra per la matrice A^T, dato che evidentemente $\operatorname{rk}_r A^T = c$ e $\operatorname{rk}_c A^T = r$, per cui appunto $r \leq c$. $\square$

Rango di una matrice

Osservazione

Il passaggio evidenziato nella dimostrazione del teorema è di fondamentale importanza, e sarà ripreso quando discuteremo il più importante teorema valido per gli spazi vettoriali finitamente generati.

Corollario

Il rango di una matrice A coincide con il numero di pivot di una sua forma a scala A'.

Dimostrazione. Per il metodo di eliminazione di Gauss, i sistemi $Ax = 0$ e $A'x = 0$ sono equivalenti, quindi $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A'$. Ora, le righe linearmente indipendenti di A' sono esattamente quelle non nulle, cioè quelle dove c'è un pivot. □

Abbiamo una conseguenza diretta sull'invertibilità di una matrice quadrata. ⧐

Matrici invertibili

Corollario

Una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ è invertibile se e solo se $\operatorname{rk} A = n$, cioè se A ha rango massimo.

Dimostrazione. Una matrice $n \times n$ invertibile deve avere rango massimo poiché una sua forma a scala è $\mathbb{1}_n$, e quest'ultima ha n pivot.
Viceversa, supponiamo che tutte le colonne $C_1, \ldots, C_n$ di A siano linearmente indipendenti. Allora queste costituiscono una base di $\mathbb{K}^n$, cosicché per ogni $j = 1, \ldots, n$ esistono espressioni di dipendenza lineare

$$b_{1j}C_1 + b_{2j}C_2 + \cdots + b_{nj}C_n = e_j$$

in $\mathbb{K}^n$, che esplicitano il j-esimo vettore e_j della base canonica come combinazione lineare delle colonne di A. È subito visto che ponendo $B = (b_{ij})$ si ha $BA = \mathbb{1}_n$, per cui A è invertibile. $\square$

Concludiamo le conseguenze del precedente teorema con il seguente importante risultato sulla compatibilità di un sistema lineare $Ax = b$ in termini di rango.

Teorema di Rouché–Capelli

Teorema (Rouché–Capelli)

Un sistema lineare $Ax = b$ ha soluzione se e solo se $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(A \mid b)$.

Dimostrazione. Sia al solito $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Osserviamo preliminarmente che per ogni $b \in \mathbb{K}^m$ si ha $\operatorname{rk} A \leq \operatorname{rk}(A \mid b)$. Per definizione, una soluzione $c = (c_1, \dots, c_n)^T$ del sistema è un vettore le cui coordinate rendono il termine noto b una combinazione lineare delle colonne di A:

$$\begin{aligned} Ac = b &\iff \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_n \end{pmatrix} c = b \\ &\iff c_1 C_1 + \cdots + c_n C_n = b\,. \end{aligned}$$

Le precedenti equivalenze provano che $Ax = b$ è risolubile se e solo se $b \in \langle C_1, \dots, C_n \rangle$; inoltre, essendo il rango il massimo numero di colonne linearmente indipendenti, abbiamo

$$\operatorname{rk}(A \mid b) = \begin{cases} \operatorname{rk} A + 1 & \text{se } b \notin \langle C_1, \dots, C_n \rangle, \\ \operatorname{rk} A & \text{se } b \in \langle C_1, \dots, C_n \rangle. \end{cases}$$

□

Sottospazi vettoriali di $\mathbb{K}^n$

Torniamo ai sottospazi vettoriali di $\mathbb{K}^n$. La teoria sul rango di una matrice ci permette di individuare dimensione e base di un sottospazio U se sono dati i suoi generatori, cioè quando

$$U = \langle u_1, u_2, \ldots, u_r \rangle \ .$$

Ci basterà infatti formare la matrice $A := \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_r \end{pmatrix}$ e portare quest'ultima (oppure A^T) in forma a scala; i t pivot forniscono $\dim U$, e pertanto potremo individuare una base scegliendo t vettori tra i generatori.

Osservazione

Nelle notazioni del procedimento appena descritto, i t vettori linearmente indipendenti da scegliere tra gli r generatori sono indicati dall'ordine con cui questi ultimi vengono disposti nella matrice e dagli scambi che vengono fatti su di essa.

Abbiamo così trovato un metodo veloce per capire se r vettori in $\mathbb{K}^n$ sono linearmente (in)dipendenti.

Sottospazi vettoriali di $\mathbb{K}^n$

Esempio

Determiniamo la dimensione e una base del sottospazio vettoriale U di $\mathbb{R}^5$ generato dai seguenti vettori

$$
\begin{aligned}
u_1 &= (1, -3, 0, 2, 1)^T, \\
u_2 &= (3, 1, 1, -1, 2)^T, \\
u_3 &= (0, 2, -2, 0, 1)^T, \\
u_4 &= (4, 0, -1, 1, 4)^T, \\
u_5 &= (2, -8, 2, 4, 1)^T .
\end{aligned}
$$

Poiché dobbiamo verificare se i vettori sono o meno linearmente indipendenti, potremmo procedere come fatto precedentemente, risolvendo il sistema di cinque equazioni

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_5 u_5 = (0, 0, \ldots, 0)$$

nelle incognite $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_5$. Tuttavia, se non fossero linearmente indipendenti, allora dovremmo rimuovere un vettore e rifare i conti...

Sottospazi vettoriali di $\mathbb{K}^n$

Oppure, possiamo calcolare il rango della matrice le cui colonne o righe sono i vettori dati, e questo ci è dato dal numero di pivot di una forma a scala della matrice scelta. Ad esempio, abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -8 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{esercizio*}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

pertanto $\dim U = 3$, e una sua base è ad esempio $\{u_1, u_2, u_3\}$.
* Le operazioni elementari per ottenere la matrice a scala sono state:

$$\begin{Bmatrix} R_2 - 3R_1 \\ R_4 - 4R_1 \\ R_5 - 2R_1 \end{Bmatrix}, \quad \{R_2 \leftrightarrow R_3\}, \quad \begin{Bmatrix} R_3 - 5R_2 \\ R_4 - 6R_2 \\ R_5 + R_2 \end{Bmatrix}, \quad \{R_4 - R_3\}.$$

Nella prossima lezione, impareremo a individuare un'espressione di dipendenza lineare tra vettori linearmente dipendenti, pure utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss.

Sottospazi vettoriali di $\mathbb{K}^n$

Esempio

Dire per quali valori del parametro $t \in \mathbb{R}$ i vettori

$$u_1 = (2, -3, 2, 0)^T, \quad u_2(t) = (1, -2, t, 2)^T, \quad u_3 = (-3, 4, 4, 0)^T$$

di $\mathbb{R}^4$ sono linearmente (in)dipendenti.

Possiamo ottenere quella forma a scala di $A := (u_1 \quad u_2(t) \quad u_3)^T$ che abbia nell'ultimo possibile pivot un'espressione (lineare) in t; in questo modo, sarà chiaro quando tale entrata è effettivamente un pivot. Abbiamo

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & t & 2 \\ -3 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{esercizio*}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & t & 2 \\ 0 & 1 & 1-2t & -2 \\ 0 & 0 & -t+6 & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

Poiché l'ultima entrata è nulla, concludiamo che

$$\operatorname{rk} A = \begin{cases} 3 & \text{se } t \neq 6, \\ 2 & \text{se } t = 6; \end{cases}$$

in particolare, i vettori dati sono linearmente dipendenti se e solo se $t = 6$.