Fondamenti di algebra lineare e geometria

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica (Canale B)

Lorenzo Martini

Università degli Studi di Padova

A.A. 2023-2024

Lezione 11

Richiamo della lezione precedente

- Intersezione ed unione di sottospazi vettoriali.
- Sottospazio vettoriale generato da un insieme.
- Insiemi di generatori.
- Base di uno spazio vettoriale.

Base di uno spazio vettoriale

Diamo alcune proprietà delle basi di uno spazio vettoriale V (finitamente generato) sopra il campo $\mathbb{K}$. I fatti fondamentali che vogliamo dimostrare sono che:

- ogni spazio vettoriale ha una base;
- tutte le basi di V hanno lo stesso numero di elementi.

Iniziamo con una caratterizzazione delle basi.

Proposizione

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Le seguenti affermazioni sono equivalenti per un insieme finito $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di vettori di V:

(a) S è una base di V;

(b) S è un insieme minimale di generatori di V; cioè, $V = \langle S \rangle$ e dato $1 \leq j \leq n$, allora $\langle S \smallsetminus \{v_j\} \rangle \subset V$;

(c) S è un insieme massimale di vettori linearmente indipendenti di V; cioè, S è linearmente indipendente e dato $v \notin S$ allora $S \cup \{v_0\}$ è linearmente dipendente.

Base di uno spazio vettoriale

Dimostrazione.
(a) $\Rightarrow$ (b) Ovviamente, S è un insieme di generatori. Se, dato un generatore v_j della base, fosse $V = \langle S \setminus \{v_j\} \rangle$, allora

$$\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \langle v_1, \ldots, \widehat{v_j}, \ldots, v_n \rangle$$

($\widehat{v_j}$ significa che v_j non compare nella lista), da cui v_j è combinazione lineare degli $n-1$ vettori $v_1, \ldots, \widehat{v_j}, \ldots, v_n$ della base, contraddizione.
(b) $\Rightarrow$ (c) Verifichiamo che l'insieme di generatori $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è linearmente indipendente. Se fosse $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \vec{0}$ per opportuni scalari non tutti nulli, allora avremmo ad esempio $v_1 \in \langle v_2, \ldots, v_n \rangle$. Gli $n-1$ vettori $v_2, \ldots, v_n$ rimangono generatori (si motivi), pertanto V risulta generato da un insieme strettamente contenuto in S, contraddicendo la minimalità di quest'ultimo tra gli insiemi di generatori per V.
(c) $\Rightarrow$ (a) Dobbiamo provare che S è un insieme di generatori per V. Dato comunque un vettore $v \in V$, se fosse $v \in V \setminus \langle S \rangle$, allora a maggior ragione $v \notin S$, dunque l'ipotesi di minimalità di S ci dice che

Base di uno spazio vettoriale

$S \cup \{v\}$ è linearmente dipendente, da cui

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n + \lambda v = \vec{0},$$

per (unici) scalari non tutti nulli. Ora, deve essere $\lambda \neq 0$, altrimenti otterremmo in $\langle S \rangle$ una espessione non banale di dipendenza lineare per $\vec{0}$, contraddizione. Pertanto, $v \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$, e abbiamo concluso. □

Il seguente teorema è la chiave per provare quanto abbiamo annunciato.

Teorema (Lemma di scambio)

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Se $\{u_1, \ldots, u_n\} \subseteq V$ è linearmente indipendente e $\{v_1, \ldots, v_r\} \subseteq V$ è un insieme di generatori, allora $n \leq r$.

Dimostrazione. (Dimostreremo che se, per assurdo, fosse $n > r$, allora gli insiemi assegnati non soddisferebbero le ipotesi date.)
Osserviamo preliminarmente che ciascun u_i è un vettore non nullo (si motivi).

Base di uno spazio vettoriale

Ciò premesso, per ipotesi abbiamo

$$u_1 = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r$$

per unici scalari non tutti nulli $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$. Possiamo supporre senza perdita di generalità che sia $\lambda_r \neq 0$, da cui $v_r \in \langle u_1, v_1, \dots, v_{r-1} \rangle$. In altre parole, possiamo sostituire ciascun vettore u_i con uno dei generatori, e facendo ciò per tutti gli $u_1, \dots, u_n$, otterremo (secondo la nostra costruzione)

$$V = \langle u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_{r-n} \rangle \, .$$

Ora, se fosse $n > r$, allora avremmo

$$V = \langle u_1, \dots, u_r \rangle,$$

e dunque per ogni $r < j \leq n$ il vettore u_j è combinazione lineare degli $u_1, \dots, u_r$; questo contraddice l'indipendenza lineare di tutti gli u_i. $\square$

Base di uno spazio vettoriale

Corollario

Ogni spazio vettoriale finitamente generato possiede una base.

Dimostrazione. Sia $S = \{v_1, \ldots, v_r\}$ un insieme di generatori per V. Se S è linearmente indipendente, allora è la base cercata. Altrimenti, per quanto visto precedentemente, esiste $1 \leq j_1 \leq r$ tale che $v_{j_1} \in \langle S \smallsetminus \{v_{j_1}\} \rangle$, e di conseguenza $V = \langle S \smallsetminus \{v_{j_1}\} \rangle$. A questo punto ripetiamo il ragionamento per $S \smallsetminus \{v_{j_1}\}$, fino ad ottenere un insieme di generatori linearmente indipendenti (il procedimento terminerà prima di esaurire tutti i generatori poiché stiamo assumendo $V \neq \{\vec{0}\}$). $\square$

Corollario

Tutte le basi di uno spazio vettoriale finitamente generato hanno lo stesso numero di elementi.

Dimostrazione. Siano $\{u_1, \ldots, u_n\}$ e $\{v_1, \ldots, v_r\}$ due basi dello spazio vettoriale V. Allora $r \leq n$ ed $n \leq r$. $\square$

Dimensione di uno spazio vettoriale

Abbiamo così dato significato univoco alla seguente nozione fondamentale, legata al concetto di base:

Definizione

Si chiama dimensione dello spazio vettoriale V finitamente generato su $\mathbb{K}$ il numero di elementi di una sua qualunque base, e si indica con $\dim_{\mathbb{K}} V$ oppure $\dim V$ se il campo $\mathbb{K}$ è chiaro dal contesto.

Osservazione

- Quella di dimensione è la nozione che meglio centra l'idea di grandezza di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale (come insieme, questo è infinito se il campo $\mathbb{K}$ è infinito).
- I due precedenti corollari sono stati dimostrati per spazi vettoriali finitamente generati. Tuttavia, è possibile dimostrare che ogni $\mathbb{K}$-spazio vettoriale possiede almeno una base, ed un'unica dimensione su $\mathbb{K}$, $\dim V$. La dimostrazione del primo fatto richiede un assioma della teoria degli insiemi (noto come lemma di Zorn), che omettiamo. Per spazi vettoriali infinitamente generati si scrive $\dim V = \infty$.

Dimensione di uno spazio vettoriale

Grazie agli esempi precedenti conosciamo già la dimensione degli spazi vettoriali che tratteremo nel corso.

Esempio

Siano $\mathbb{K}$ un campo ed $m, n \in \mathbb{N}$.

(1) $\dim M_{m,n}(\mathbb{K}) = mn$; in particolare, $\dim \mathbb{K}^n = n$.

(2) $\dim \mathbb{K}[x] = \infty$ mentre $\dim \mathbb{K}[x]_{\leq d} = d + 1$.

(3) Come abbiamo visto con l'esempio di $\mathbb{C}$, la dimensione dipende dal campo degli scalari. Infatti, vale $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ mentre $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ (l'insieme $\{1, i\}$ è linearmente indipendente su $\mathbb{R}$).

Concludiamo con ulteriori importanti risultati sulle basi e la dimensione di uno spazio vettoriale che sono conseguenza del lemma di scambio. Osserviamo che il primo corollario (quello sull'esistenza della base) si può riformulare dicendo che da ogni insieme di generatori è possibile estrarre una base. Ebbene, vale un risultato analogo per gli insiemi linearmente indipendenti.

Dimensione di uno spazio vettoriale

Corollario

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale finitamente generato. Un insieme linearmente indipendente di V si può estendere ad una base.

Dimostrazione. Siano $n = \dim V$ e $S = \{u_1, \dots, u_k\}$ l'insieme linearmente indipendente. Se $k = n$, allora S è una base, grazie alla prima proposizione. In caso contrario, esiste $u_{k+1} \in V \setminus \langle S \rangle$; con tale vettore, ripetiamo il ragionamento di sopra per l'insieme $S \cup \{u_{k+1}\}$, che è linearmente indipendente per costruzione: se $k + 1 = n$, allora abbiamo formato una base, altrimenti continuiamo per altri $n - k + 1$ passi. $\square$

Ora che abbiamo definito e caratterizzato le basi di uno spazio vettoriale, comprendendo gli esempi più basilari, ci occuperemo di determinare le basi (e dunque la dimensione) di spazi e sottospazi vettoriali in situazioni più specifiche.
Nel caso di sottospazi di $\mathbb{K}^n$, torneremo ad utilizzare frequentemente metodi matriciali.

Introduzione ai sottospazi vettoriali di $\mathbb{K}^n$

Inizieremo proprio dal caso più familiare di sottospazi di $\mathbb{K}^n$. I metodi matriciali visti finora sono risultati efficaci, ma andranno affinati e approfonditi.

Esempio

Nello spazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$, siano

$$v_1 = (-1, 0, 1, -1)^T \qquad v_2 = (0, 3, 6, -3)^T$$
$$v_3 = (-5, 1, 7, -6)^T \qquad v_4 = (3, 4, 5, -1)^T$$

e sia $U := \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$. Determiniamo una base di U, e di conseguenza la sua dimensione.

La dimensione di U è il numero (massimo) di vettori linearmente indipendenti tra i suoi generatori v_1, v_2, v_3, v_4; una sua base sarà formata da tali generatori linearmente indipendenti.
Sappiamo già come determinare se dei vettori in un generico $\mathbb{K}^n$ sono linearmente indipendenti.

Sottospazi vettoriali di $\mathbb{K}^n$

Occorre risolvere in $\mathbb{R}^4$ l'equazione

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = (0,0,0,0)^T$$

nelle incognite $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$, cioè risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} -\lambda_1 \qquad\quad - 5\lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \\ \qquad 3\lambda_2 + \lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + 6\lambda_2 + 7\lambda_3 + 5\lambda_4 = 0 \\ -\lambda_1 - 3\lambda_2 - 6\lambda_3 - \lambda_4 = 0, \end{cases}$$

da cui
(esercizio)

$$\begin{cases} \lambda_1 = -5\lambda_3 + 3\lambda_4 \\ \lambda_2 = -(\lambda_3 + 4\lambda_4)/3 \\ (\lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

Pertanto, assegnando ad esempio i valori $\lambda_3 = 1$ e $\lambda_4 = -1$ otteniamo l'espressione di dipendenza lineare $-8v_1 + v_2 + v_3 - v_4 = \vec{0}$ tra i generatori, che dunque non sono linearmente indipendenti, e in particolare $\dim U \leq 3$. Per verificare se $\dim U = 3$, ripetiamo il procedimento di sopra rimuovendo un generatore da U (l'espressione di dipendenza lineare ottenuta ci dice che possiamo rimuovere un qualsiasi generatore). Quello che si verifica è che $\dim U < 3$, e pertanto necessariamente $\dim U = 2$.