Fondamenti di algebra lineare e geometria

Corso di Laurea in Ingegneria dell'Energia (Canale B)

Lorenzo Martini

Università degli Studi di Padova

A.A. 2023-2024

Lezione 10

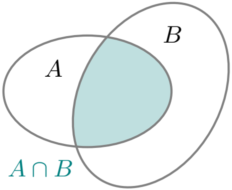
Richiamo della lezione precedente

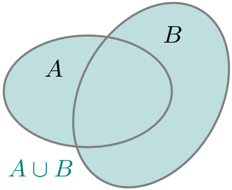
- Combinazioni lineari in uno spazio vettoriale.
- Indipendenza e dipendenza lineare di vettori.
- Sottospazi vettoriali.

Intersezione ed unione di sottospazi

Ricordiamo che dati un insieme S e suoi sottoinsiemi A, B, si chiama

- intersezione di A e B l'insieme $A \cap B := \{x \in S \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$;
- unione di A e B l'insieme $A \cup B := \{x \in S \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$.





Con intersezioni ed unioni di (sotto)insiemi possiamo creare nuovi (sotto)insiemi. È naturale domandarsi se intersezioni ed unioni di sottospazi vettoriali sono sottospazi vettoriali. Come ora dimostreremo, abbiamo risposta affermativa con le intersezioni, mentre l'unione di sottospazi vettoriali non è mai un sottospazio vettoriale.

Intersezione e unione di sottospazi

Proposizione

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e siano U, W due suoi sottospazi vettoriali.

(i) $U \cap W$ è sottospazio vettoriale di V;

(ii) $U \cup W$ è sottospazio vettoriale di V se e solo se $U \subseteq W$ oppure $W \subseteq U$.

Dimostrazione.

(i) Dobbiamo verificare che $U \cap W$ non è vuoto e che è chiuso per addizioni e multipli scalari. In quanto sottospazi vettoriali di V, U e W contengono entrambi $\vec{0}$, quindi questo vettore appartiene alla loro intersezione, cosicché $U \cap W \neq \emptyset$. Siano ora v_1, v_2 due elementi di $U \cap W$. Allora, per definizione di spazio vettoriale, abbiamo sia $v_1 + v_2 \in U$ che $v_1 + v_2 \in W$, dunque la somma appartiene all'intersezione. In modo analogo, si prova che $\lambda v \in U \cap W$ per ogni $v \in U \cap W$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

Intersezione e unione di sottospazi

(ii) È chiaro che se $U \subseteq W$, allora $U \cup W$ è sottospazio di V, poiché coincide con W. Dimostriamo ora che se $U \cup W$ è sottospazio vettoriale di V, e $U \nsubseteq W$, allora $W \subseteq U$. Per la seconda ipotesi, esiste $u_0 \in U$ tale che $u_0 \notin W$. Sia ora $w \in W$ un generico vettore e dimostriamo che $w \in U$. Ricordiamo che la prima ipotesi garantisce $u_0 + w \in U \cup W$; cioè, tale vettore appartiene ad U oppure a W. Vediamo però che non può essere $u_0 + w \in W$, altrimenti

$$u_0 = \overbrace{u_0 + w}^{\in W} - w \in W,$$

contraddizione con $u_0 \notin W$. Dunque $u_0 + w \in U$, e così

$$w = \underbrace{u_0 + w}_{\in U} - u_0 \in U \ . \qquad \square$$

Esempio

In $\mathbb{R}^2$, l'unione $\langle(1,0)\rangle \cup \langle(0,1)\rangle$ coincide con gli assi cartesiani, i quali, presi assieme, non costituiscono un sottospazio vettoriale.

Sottospazio generato da un insieme

Data l'importanza dell'unione di sottoinsiemi, occorre rimediare al fatto di non poter disporre algebricamente di unioni di sottospazi vettoriali.

Definizione

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e sia $S \subseteq V$ un sottoinsieme di V. Si chiama sottospazio vettoriale generato da S l'insieme

$$\langle S \rangle := \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \mid n \in \mathbb{N},\ v_i \in S,\ \lambda_i \in \mathbb{K}\ \forall i = 1, \dots, n\}$$

di tutte le combinazioni lineari in V degli elementi di S.

Si osservi che se $S = \{v_1, \dots, v_n\}$, allora $\langle S \rangle = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$.

Sottospazio generato da un insieme

La precedente definizione è ben posta, nel senso che $\langle S\rangle$ è proprio un sottospazio vettoriale di V. Di più:

Proposizione

Dati V ed S come sopra, allora $\langle S\rangle$ è il più piccolo sottospazio vettoriale di V contenente S.

Dimostrazione. Dobbiamo verificare che $\langle S\rangle$ è un sottospazio vettoriale di V, che contiene S, e che dato un altro sottospazio vettoriale U contenente S allora $\langle S\rangle \subseteq U$.
Esattamente come per il caso di $\{v_1, \ldots, v_n\}$, $\langle S\rangle$ è sottospazio vettoriale di V poiché combinazioni lineari di combinazioni lineari di elementi di S sono combinazioni lineari di elementi di S. Inoltre, è chiaro che $S \subseteq \langle S\rangle$ poiché ogni vettore non nullo $v \in S$ può essere riguardato come la combinazione lineare $1v$.
Infine, dato U sottospazio vettoriale di V contenente S, allora ogni elemento di $\langle S\rangle$ appartiene pure ad U, per definizione di spazio vettoriale. $\square$

Sottospazio generato da un insieme

Definizione

Siano V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale ed U, W due suoi sottospazi vettoriali. Poniamo

$$U + W := \langle U \cup W \rangle \ .$$

Pertanto, $U + W$ è il più piccolo sottospazio di V contenente il sottoinsieme $U \cup W$ di V. In particolare, $U + W$ consiste delle combinazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{K}$ degli elementi di U o di W; grazie alle proprietà associativa e distributive, è immediato dimostrare il seguente:

Lemma

Sia $V \supseteq U, W$ come sopra. Allora

$$U + W = \{u + w \mid u \in U,\, w \in W\} \ .$$

Insiemi di generatori

Definizione

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Un sottoinsieme $S \subseteq V$ si dice insieme di generatori per V se

$$V = \langle S \rangle \ .$$

Si osservi che ogni spazio vettoriale V ha almeno un insieme di generatori, infatti $V = \langle V \rangle$.

Dato che l'inclusione $V \supseteq \langle S \rangle$ è vera per qualsiasi sottoinsieme S, allora S è un insieme di generatori per V se solo se ogni vettore v di V si esprime come combinazione lineare di alcuni vettori di S.

Definizione

Uno spazio vettoriale V è finitamente generato se possiede un insieme finito di generatori.

Nel caso in cui V sia (finitamente) generato dall'insieme $\{v_1, \ldots, v_n\}$, si dice che i vettori $v_1, \ldots, v_n$ sono dei generatori di V. In altre parole, con combinazioni lineari di tali n vettori possiamo ottenere tutti i vettori di V.

Insiemi di generatori

Esempio

Siano $\mathbb{K}$ un campo ed $m, n \in \mathbb{N}$.

(1) Lo spazio vettoriale $\mathbb{K}^n$ è generato dagli n vettori $e_1, \ldots, e_n$ definiti come

$$e_i := (0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-ma coordinata}}}{1}, 0, \ldots, 0)^T$$

per ogni $i = 1, \ldots, n$. Infatti, per ogni $v = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^T$ abbiamo

$$v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \ .$$

Si osservi che $\mathbb{K}^n$ rimane generato pure aggiungendo agli $e_1, \ldots, e_n$ un qualsiasi altro vettore (che sarà combinazione lineare di questi ultimi).

Insiemi di generatori

(2) Analogamente al caso di $\mathbb{K}^n$, le mn matrici E_{ij} introdotte precedentemente sono generatori dello spazio vettoriale $M_{mn}(\mathbb{K})$: per ogni $A = (a_{ij})$ abbiamo

$$A = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij} \right) .$$

(3) $\mathbb{K}[x]$ <u>non</u> è finitamente generato. Infatti, se esistessero n polinomi generatori $p_1(x), \ldots, p_n(x)$, allora avendo ciascuno di essi un grado d_i, basterebbe considerare un polinomio $p(x)$ di grado $d = \max\{d_i \mid i = 1, \ldots, n\} + 1$ per vedere che questo non può essere scritto come combinazione lineare dei $p_i(x)$ su $\mathbb{K}$.

(4) Fissato $d \in \mathbb{N}$ e definito $\mathbb{K}[x]_{\leq d}$ come l'insieme dei polinomi nell'indeterminata x di grado al più d, allora $\mathbb{K}[x]_{\leq d}$ è uno spazio vettoriale finitamente generato dai monomi $1, x, x^2, \ldots, x^d$.
Si verifichi per esercizio che $\mathbb{K}[x]_{\leq d}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}[x]$.

Base di uno spazio vettoriale

Si osservi che, in generale, nemmeno con un insieme finito $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ di generatori per V, la scrittura di ogni vettore di V come combinazione lineare degli elementi di S non è unica. Infatti, se

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_n v_n$$

in V, allora

$$(\lambda_1 - \gamma_1) v_1 + \cdots + (\lambda_n - \gamma_n) v_n = \vec{0},$$

per cui l'unicità della scrittura (data dal fatto che sia $\lambda_i = \gamma_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$) si verifica se e solo se i vettori $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti. Questa semplice osservazione ci porta alla nozione più importante del corso:

Definizione

Una base di uno spazio vettoriale V è un suo insieme di generatori linearmente indipendenti.

Base di uno spazio vettoriale

Osservazione

- Dato che abbiamo fornito la nozione di (in)dipendenza lineare solamente per insiemi finiti di vettori, la precedente definizione di base risulta ben posta per gli spazi vettoriali finitamente generati. Tuttavia, tale definizione si dà per un qualsiasi spazio vettoriale, dicendo che un sottoinsieme (infinito) S di V è linearmente indipendente se ogni sottoinsieme finito di S è linearmente indipendente.
- In linea di principio, saremo più interessati agli spazi vettoriali finitamente generati (come gli spazi di matrici $m \times n$); ad ogni modo, sarà importante tenere a mente che esistono spazi vettoriali infinitamente generati (come $\mathbb{K}[x]$).

Ripetiamo dunque che il punto cruciale di disporre di una base per uno spazio vettoriale V sta nel fatto che ciascun vettore si scriverà in modo unico come combinazione lineare dei generatori, cioè è completamente determinato dall'unica n-upla ordinata $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ di scalari che compaiono in tale combinazione lineare.

Base di uno spazio vettoriale

Esempio

Siano $\mathbb{K}$ un campo ed $m, n \in \mathbb{N}$.

(1) Le mn matrici E_{ij} formano una base per $M_{m,n}(\mathbb{K})$. In particolare, gli n vettori $e_1, \ldots, e_n$ di $\mathbb{K}^n$ formano una base. Questi affermazioni si accertano usando il fatto che $\mathbb{K}$ è un campo. Entrambe le basi si chiamano basi canoniche, rispettivamente di $M_{m,n}(\mathbb{K})$ e $\mathbb{K}^n$.

(2) Una base del piano $\mathbb{K}^2$ è formata da ogni coppia di vettori non nulli $v_1, v_2 \in \mathbb{K}^2$ tali che $\langle v_1 \rangle \neq \langle v_2 \rangle$ (e cioè linearmente indipendenti).

(3) Il numero degli elementi di una base dipende dal campo degli scalari. Ad esempio, $\mathbb{C}$ è generato sopra se stesso da qualsiasi $z \neq 0$, numero che è pure linearmente indipendente in quanto non nullo; diversamente, come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale una sua possibile base è $\{1, i\}$.

(4) Grazie al principio di identità dei polinomi è subito visto che l'insieme (numerabile) $\{x^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ è linearmente indipendente e pertanto una base per $\mathbb{K}[x]$. In particolare, $\{1, x, \ldots, x^d\}$ è una base per $\mathbb{K}[x]_{\leq d}$.