Fondamenti di algebra lineare e geometria

Corso di Laurea in Ingegneria dell'Energia (Canale B)

Lorenzo Martini

Università degli Studi di Padova

A.A. 2023-2024

Introduzione al corso

Informazioni, programma e diapositive del corso alla pagina web del corso.

Argomenti principali:

- Sistemi di equazioni lineari.
- Spazi vettoriali ed applicazioni lineari.
- Determinanti e diagonalizzazione di endomorfismi.
- Spazi vettoriali euclidei.
- Spazi affini e fondamenti di geometria analitica.

Lezione 1

Nozioni preliminari

Considereremo conosciuti la nozione di insieme (in particolare, di appartenenza "$\in$", di inclusione "$\subseteq$", e di uguaglianza "$=$" cioè di doppia inclusione), e gli insiemi $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ dei numeri naturali, $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ dei numeri interi, ed $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

Una applicazione (o funzione) di un insieme X in un insieme Y è una legge che associa ad ogni elemento x di X uno ed un solo elemento y di Y. Per indicare che una legge f tra X ed Y è un'applicazione, useremo le seguenti notazioni:

$$
\begin{aligned}
f\colon X &\longrightarrow Y \\
x &\longmapsto y,
\end{aligned}
$$

o anche $f\colon X \to Y$, $x \mapsto y$, e simili. Il solo elemento $y \in Y$ che è funzione di $x \in X$ per mezzo dell'applicazione f si indica generalmente con $f(x)$. Un'applicazione $f\colon X \to Y$ si dice:

- suriettiva se per ogni $y \in Y$ esiste $x \in X$ tale che $y = f(x)$;
- iniettiva se ad elementi distinti in X, f fa corrispondere elementi distinti in Y: $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, per ogni $x_1, x_2 \in X$.

Applicazioni insiemistiche

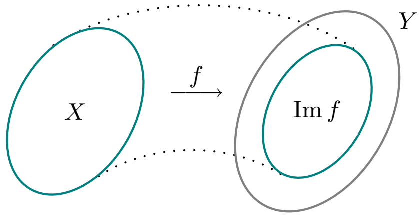
Data un'applicazione $f\colon X \to Y$, definiamo la sua immagine

$$\operatorname{Im} f := \{f(x) \mid x \in X\},$$

come l'insieme degli elementi in Y che sono mappati da qualche elemento x di X. Notiamo che vale sempre $\operatorname{Im} f \subseteq Y$.

Osservazione

Un'applicazione $f\colon X \to Y$ è suriettiva se e solo se $\operatorname{Im} f = Y$, cioè se vale pure l'inclusione $Y \subseteq \operatorname{Im} f$.



Generalmente, di un'applicazione $f\colon X \to Y$ l'insieme X si chiama suo dominio mentre Y suo codominio.

Composizione di applicazioni

Due applicazioni f e g sono uguali, $f = g$, se hanno lo stesso dominio, lo stesso codominio, e coincidono "punto a punto", cioè $f(x) = g(x)$ per ogni x del loro dominio.

Applicazioni insiemistiche possono essere "composte" sotto precise condizioni relative a dominio e codominio. Se $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ sono applicazioni, allora si chiama loro composizione l'applicazione di X in Z definita come

$$\begin{aligned} g \circ f\colon X &\longrightarrow Z \\ x &\longmapsto g(f(x)) \ . \end{aligned}$$

La composizione di applicazioni va letta (e pronunciata) da destra verso sinistra: nelle notazioni di sopra, $(g \circ f)(x)$ è quell'elemento di Z ottenuto da x applicando prima f e successivamente g:

$$\begin{aligned} g \circ f\colon X &\longrightarrow \quad Y \quad \longrightarrow Z \\ x &\longmapsto f(x) \longmapsto g(f(x)) \ . \end{aligned}$$

Composizione di applicazioni

Osservazione

Abbiamo definito la composizione $g \circ f$ di applicazioni f e g solo nel caso in cui il codominio della prima coincide con il dominio della seconda. Inoltre, è subito visto che in generale $g \circ f \neq f \circ g$ (una delle due applicazioni potrebbe non essere definita, ma se anche lo fosse la composizione non è commutativa).

Esempio

Consideriamo le funzioni

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 - 1 \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cos x + \sin x \,. \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= \cos(x^2 - 1) + \sin(x^2 - 1), \\ (f \circ g)(x) &= 2\cos(x)\sin(x) = \sin(2x), \end{aligned}$$

per cui $g \circ f \neq f \circ g$ dato che le funzioni non coincidono ad esempio per $x = 0$.

Applicazioni insiemistiche

Un'applicazione $f\colon X \to Y$ si dice biiettiva se è suriettiva ed iniettiva. Quindi,

f è biiettiva se e solo se per ogni $y \in Y$ esiste un unico elemento $x \in X$ tale che $y = f(x)$.

(Si osservi che nell'affermazione precedente il "per ogni...esiste" è giustificato dalla suriettività, mentre il "esiste unico..." è dato dall'iniettività.) In presenza di un'applicazione biiettiva $f\colon X \to Y$ possiamo anche definire la legge

$$\begin{aligned} Y &\longrightarrow X \\ y &\longmapsto x_y \end{aligned}$$

dove x_y è quell'unico elemento di X tale che $f(x_y) = y$, dato appunto dalla biiettività di f. Quindi, tale legge è un'applicazione, pure biiettiva, si indica f^{-1} ed è chiamata inversa di f. Si osservi che

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \text{e} \quad (f \circ f^{-1})(y) = y,$$

per ogni $x \in X$ ed $y \in Y$.

Prodotto cartesiano

Dati due insiemi X, Y, si chiama loro prodotto cartesiano l'insieme

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$$

delle coppie ordinate di elementi di X ed Y.

Osservazione

- Il prodotto cartesiano non è commutativo su insiemi distinti: $X \neq Y \implies X \times Y \neq Y \times X$, per definizione.
- Per coppia ordinata di elementi intenderemo ciò che la nostra intuizione suggerisce: un nuovo elemento fatto di due elementi, detti le sue coordinate o componenti, presi ordinatamente dagli insiemi considerati. In particolare, due coppie ordinate sono uguali se tali sono le rispettive coordinate, prese ordinatamente: $(x, y) = (x', y') \iff x = x',\ y = y'$. Ad ogni modo, la definizione di coppia ordinata è

  $$(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\},$$

  e la nozione di uguaglianza definita sopra coincide con quella indotta dall'uguaglianza insiemistica.

Prodotto cartesiano

Il prodotto cartesiano di insiemi è associativo, possiamo cioè considerare n insiemi $X_1, \ldots, X_n$ e formare i loro prodotti cartesiani (da destra o da sinistra)

$$X_1 \times (X_2 \times \cdots \times (X_{n-2} \times (X_{n-1} \times X_n)))$$

e

$$(((X_1 \times X_2) \times X_3) \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n \ .$$

È facile convincersi che tali insiemi coincidono, e pertanto potranno essere indicati come

$$X_1 \times \cdots \times X_n := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in X,\, i = 1, \ldots, n\},$$

cioè come gli insiemi delle n-uple ordinate degli elementi degli insiemi $X_1, \ldots, X_n$.

Esempio

Nel seguito saremo particolarmente interessati allo studio del piano reale $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e dello spazio reale $\mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Equazioni in un'incognita

Ricordiamo che un'equazione nell'incognita x e a coefficienti reali è un'uguaglianza formale

$$f(x) = 0,$$

dove f è una funzione $X \to \mathbb{R}$, per un certo dominio $X \subseteq \mathbb{R}$, e 0 è lo zero di $\mathbb{R}$. L'incognita x non è un elemento fissato di X, ma un oggetto che può assumere ogni valore numerico. Una soluzione (reale) dell'equazione $f(x) = 0$ è ogni $c \in \mathbb{R}$ tale che $f(c) = 0$. Si osservi che, con questa definizione di soluzione, non stiamo chiedendo che $c \in X$.

In altre parole, una soluzione reale è ogni numero reale che assegnato all'incognita x rende l'uguaglianza formale $f(x) = 0$ un'identità nell'insieme $\mathbb{R}$.

Ciò detto, non tutte le equazioni a coefficienti reali hanno soluzione in $\mathbb{R}$. Ad esempio, non esiste alcun valore reale che soddisfi $\cos(x) + 2 = 0$, oppure $x^2 + 1 = 0$.
Questa seconda equazione sarà per noi più interessante di altre: essa esemplifica una equazione polinomiale nell'incognita x.

Equazioni polinomiali un'incognita

Definizione

- Si chiama funzione polinomiale a coefficienti reali ogni applicazione del tipo

$$\begin{aligned} p\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n, \end{aligned}$$

  per opportuni $n \in \mathbb{N}$ ed $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.
- Si chiama equazione polinomiale nell'incognita x ogni equazione del tipo $p(x) = 0$, dove p è una funzione polinomiale a coeficienti reali.

Ad esempio, $1 = 0$, $x + \sqrt{2} = 0$, $x^2 + 1 = 0$, $x^5 - x = 0$ sono equazioni polinomiali. Le funzioni polinomiali del tipo $p\colon x \mapsto a \in \mathbb{R}$ sono dette costanti; evidentemente, le equazioni polinomiali associate non ammettono mai soluzione a meno che $a = 0$.

Il nostro primo obiettivo è quello di definire un insieme in cui tutti le equazion in x di funzioni polinomiali non costanti su $\mathbb{R}$ hanno soluzione.

Polinomi in una indeterminata

Ritenendo chiarita la differenza tra variabile di una funzione (polinomiale) $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (cioè un numero generico del dominio) e di incognita dell'equazione $p(x) = 0$, introduciamo una nozione che ci permetterà, tra le altre cose, di non dover più distinguere questi due nozioni. L'idea è di sfruttare il concetto di incognita, cioè di qualcosa che si può trattare algebricamente come fosse un numero—ad esempio reale—per il quale ha quindi senso parlare di somme, mulitpli, prodotti e potenze...

Definizione

Sia x una incognita. Si chiama polinomio nell'indeterminata x a coefficienti reali ogni espressione formale del tipo

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n,$$

con $n \in \mathbb{N}$ ed $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Il maggiore tra gli indici $0 \leq i \leq n$ tale che $a_i \neq 0$ si chiama grado del polinomio.

Si osservi che polinomi si possono sommare e moltiplicare seguendo le stesse regole di calcolo che valgono in $\mathbb{R}$.

Polinomi in una indeterminata

Se $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ è un polinomio di grado n, allora l'uguaglianza polinomiale $p(x) = 0$ diventa un'equazione polinomiale a tutti gli effetti. In questo contesto, una soluzione dell'equazione è spesso detta radice del polinomio; in particolare, possiamo riformulare quanto annunciato sopra dicendo che:

Il nostro primo obiettivo è quello di definire un insieme in cui tutte i polinomi in x di grado positivo a coefficienti su $\mathbb{R}$ hanno una radice.