Def Un endomorfismo $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si dice ISOMETRIA se $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$

$$f(v) \cdot f(w) = v \cdot w$$

cioè f mantiene il prodotto scalare

Proprietà delle isometrie

1. f mantiene la norma

$\forall v \in \mathbb{R}^n \quad \|f(v)\|^2 = f(v) \cdot f(v) = v \cdot v = \|v\|^2$

$\Rightarrow \forall v \in \mathbb{R}^n \quad \|f(v)\| = \|v\|$

2. $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}_{\mathbb{R}^n}\}$, cioè f è iniettiva

$$f(v) = \vec{0}_{\mathbb{R}^n} \iff \|f(v)\| = 0_{\mathbb{R}} \overset{1}{\iff} \|v\| = 0_{\mathbb{R}} \iff v = \vec{0}_{\mathbb{R}^n}$$

Cioè $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}_{\mathbb{R}^n}\}$

3. f è un isomorfismo $(f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$

$$n = \dim \mathbb{R}^n = \underbrace{\dim \operatorname{Ker} f}_{0 \text{ per } 2} + \dim \operatorname{Im} f$$

$\operatorname{Im} f \subseteq \mathbb{R}^n$, $\dim \operatorname{Im} f = n$, $\dim \mathbb{R}^n = n$

$\Rightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^n =$ codominio di f

$\Rightarrow \mathrm{Im} f = \mathbb{R}^n$ = codominio di f

$\Rightarrow$ f è suriettiva

f iniettiva e suriettiva $\Rightarrow$ f isomorfismo

④ **f mantiene gli angoli**

$$\cos(\widehat{vw}) \overset{def}{=} \frac{v \cdot w}{\|v\| \, \|w\|} \overset{①}{=} \frac{f(v) \cdot f(w)}{\|f(v)\| \, \|f(w)\|} = \cos \widehat{f(v) f(w)}$$

⑤ **Se λ è un autovalore di f, allora $\lambda = \pm 1$**

$\exists\, v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ t.c. $f(v) = \lambda v$

$$\|v\| \overset{①}{=} \|f(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$$

$\Rightarrow |\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

⑥ **Se $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è base ON di $\mathbb{R}^n$ allora $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ è base ON di $\mathbb{R}^n$**

per ① e ④

<u>Def</u> Una matrice $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ è detta ORTOGONALE se $A^T (= A^t) = A^{-1}$ cioè

$$A A^t = A^t A = Id = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Es $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 + 1/2 & -1/2 + 1/2 \\ -1/2 + 1/2 & 1/2 + 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A casa verificare che anche $A A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ A è ortogonale

Lemma

A ortogonale $\Rightarrow$ $\det A = \pm 1$

dim A ortogonale $\Rightarrow$ $A^t A = Id$

$$\Rightarrow 1 = \det Id = \det(A^t A)$$

Teo di Binet

$$= \det(A^t) \det(A)$$

$\det(A^t) = \det(A)$

$$= \det(A) \det(A)$$

$$= (\det(A))^2$$

Dunque $\det A = \pm 1$

Proposizione

A ortogonale $\iff$ le colonne di A formano una base ON di $\mathbb{R}^n$

dim: Sia $A = \begin{pmatrix} v_1 & | & v_2 & | & \dots & | & v_n \end{pmatrix}$ e $A^t = \begin{pmatrix} v_1 \\ \hline v_2 \\ \hline - - - \\ \hline v_n \end{pmatrix}$

$$A^t A = \begin{pmatrix} v_1 \\ \hline v_2 \\ \hline \\ \hline v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & | & v_2 & | & \dots & | & v_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 & \dots & v_1 \cdot v_n \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 & \dots & v_2 \cdot v_n \\ & & & \\ v_n \cdot v_1 & v_n \cdot v_2 & \dots & v_n \cdot v_n \end{pmatrix}$$

$$A^t A = Id = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} v_i \cdot v_i = 1 \\ v_i \cdot v_j = 0 \quad \text{per } i \neq j \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \|v_i\| = 1 \\ v_i \perp v_j \end{cases}$$

$$\iff \{v_1, \dots, v_n\} \text{ è ON}$$

Proposizione

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ isometria $\iff$ la matrice associata

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ isometria $\iff$ la matrice associata ad f, $M_{\mathcal{B}}(f)$, rispetto ad una base ON del dominio è ortogonale

<u>dim</u>: $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base ON

$$f \text{ isometria} \underset{⑤}{\iff} \{f(v_1), \dots, f(v_n)\} \text{ è base ON}$$

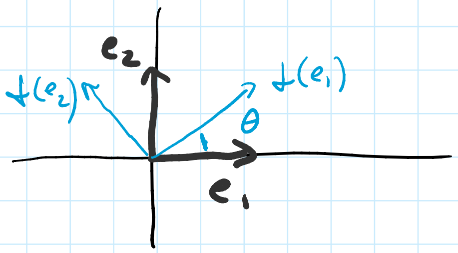
$$\iff M_{\mathcal{B}}(f) = \left(f(v_1) \,\middle|\, f(v_2) \,\middle|\, \dots \,\middle|\, f(v_n) \right)$$

con colonne date base base ON

proposizione precedente

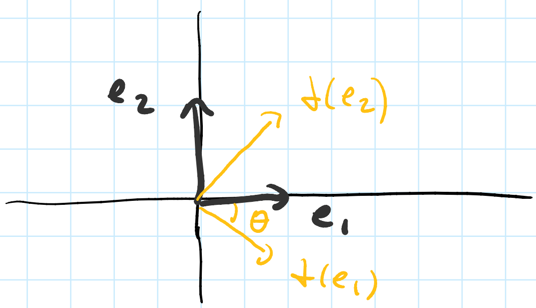
$\iff M_{\mathcal{B}}(f)$ ortogonale.

Isometrie in $\mathbb{R}^2$



f corrisponde ad una rotazione in un angolo θ in senso antiorario

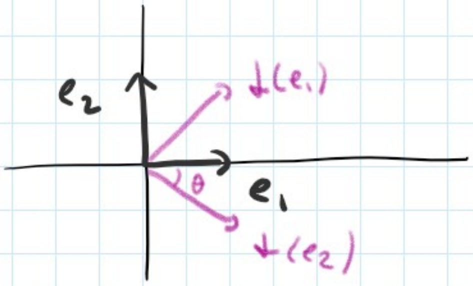
$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \det A = 1$$



f corrisponde ad una rotazione di un angolo θ in senso orario

in senso orario

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \det A = 1$$



f corrisponde prima ad una riflessione poi ad una rotazione

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \det A = -1$$

Es
$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

Diagonalizzazione delle matrici simmetriche reali:

Def $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ è <u>SIMMETRICA</u> se $A = A^t$

cioè se $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall i = j$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$A = A^t \iff \begin{cases} a_{11} = a_{11} \\ a_{12} = a_{21} \\ a_{21} = a_{12} \\ a_{22} = a_{22} \end{cases} \iff a_{21} = a_{12}$$

Def Due matrici $A, B \in M_{nn}(\mathbb{R})$ si dicono ORTOGONALMENTE SIMILI se esiste una matrice ortogonale $P \in M_{nn}(\mathbb{R})$ t.c.

$$B = P^{-1} A P = P^t A P$$

$\downarrow$

P è ortogonale cioè $P^t = P^{-1}$

Def Una matrice $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ si dice ORTOGONALMENTE DIAGONALIZZABILE se esistono una matrice $P \in M_{nn}(\mathbb{R})$ ortogonale ed una matrice $D \in M_{nn}(\mathbb{R})$ vale che

$$D = P^{-1} A P = P^t A P$$

cioè A è diagonalizzabile tramite una matrice ortogonale

cioè A è ortogonalmente simile ad una matrice diagonale D.

<u>Oss</u> A è ortogonalmente diagonalizzabile $\Leftrightarrow$
$\exists$ una base ON di $\mathbb{R}^n$ formata di autovettori di A
$\Leftrightarrow$
$D = P^{-1} A P$ con $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ matrice associata ad f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^n$

con D matrice diagonale con gli autovalori di A nella diagonale

con $P = M_{B}^{\mathcal{E}}(Id)$ matrice di cambiamento di base da $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base ON formata da autovettori a $\mathcal{E}$

<u>Oss</u> D diagonale $\Leftrightarrow$ $\exists$ B base formata da autovettori di f (o di A)

P ortogonale $\Leftrightarrow$ B è ON

Teorema spettrale

Teorema spettrale

$A \in M_{n n}(\mathbb{R})$

A è simmetrica $\Longleftrightarrow$ A è ortogonalmente diagonalizzabile

Proposizione

A ortogonalmente diagonalizzabile $\Rightarrow$ A simmetrica

dim A ortogonalmente diagonalizzabile $\overset{def}{\Rightarrow}$

$\exists D$ matrice diagonale e $\exists P$ ortogonale t.c. $D = P^{-1}AP$

$\Leftarrow P^t = P^{-1}$

$$D = P^{-1}AP$$

$$PD = \underbrace{PP^{-1}}_{Id}AP$$

$$PD = AP$$

$$PDP^{-1} = A\underbrace{PP^{-1}}_{Id}$$

$$\underbrace{PDP^{-1}}_{PDP^t} \overset{*}{=} A$$

poiché P è ortogonale cioè $P^t = P^{-1}$

PDP^t poiché P è ortogonale cioè $P^t = P^{-1}$

Calcoliamo A^t e verifichiamo che $A^t = A$

$$A^t \overset{*}{=} (PDP^t)^t \quad (EF)^t = F^tE^t$$

$$= P^{tt} D^t P^t \quad D \text{ è diagonale} \Rightarrow D^t = D$$

$$= P\, D\, P^t \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad D^t = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = D$$

$$\overset{*}{=} A$$

cioè $A^t = A \iff A$ è simmetrica

<u>Es</u> Determinare la proiezione ortogonale di $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ su $U = \langle u_1, u_2 \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$ con $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Si verifica che $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono LI

$\{u_1, u_2\}$ sono generatori, LI $\Rightarrow \{u_1, u_2\}$ è base di U

Trovare una base ON di U. Applico Gram Schmidt.

$$u_1' = \frac{u_1}{\|u_1\|} \qquad \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(1\,0\,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{1} = 1$$

$$= u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_2' = \frac{u_2 - (u_2 \cdot u_1')\, u_1'}{\| u_2 - (u_2 \cdot u_1')\, u_1' \|}$$

$$u_2 - (u_2 \cdot u_1')\, u_1' = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \Big[\overbrace{(1\,1\,1)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}^{1} \Big] \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\left\| \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}} = \sqrt{(0\,1\,1)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$u_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$\{u_1', u_2'\}$ è base ON di U ottenuta a partire dalla base $\{u_1, u_2\}$ di U grazie a Gram Schmidt.

Dalla teoria sappiamo che la <u>proiezione ortogonale di v su U</u> è

$$(v \cdot u_1')\, u_1' + (v \cdot u_2')\, u_2'$$

$$= \Big[\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}_{(-1\,2\,0)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = -1} \Big] \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \Big[\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}}_{(-1\,2\,0)\begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix} = 2/\sqrt{2}} \Big] \begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$= -1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$= -1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2/2\\2/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Se $\{u_1, \dots, u_m\}$ è base ON di U

Allora $\forall\, v \in V$

$$(v \cdot u_1)\, u_1 + (v \cdot u_2)\, u_2 + \dots + (v \cdot u_m)\, u_m$$

è la proiezione ortogonale di v su U
