Es $f_h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ rappresentata dalla matrice $M_h = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}$ con $h \in \mathbb{R}$

In M_h ho 2 colonne uguali $\Rightarrow rk(M_h) < 3$

$\forall h \quad \underbrace{\dim \mathbb{R}^3}_{3} = \dim \operatorname{Ker} f_h + \underbrace{\dim \operatorname{Im} f_h}_{rk(M_h)}$

$\dim \operatorname{Ker} f_h \geq 1$, $\quad rk(M_h) < 3$

$\forall h \quad \dim \operatorname{Ker} f_h \geq 1 \iff \forall h \ f_h$ non è iniettiva

$\forall h \quad \dim \operatorname{Im} f_h < 3 = \dim$ codominio $\iff$
$\forall h \quad f_h$ non è suriettiva

$\operatorname{Ker} f_h = \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid f_h(v) = 0_{\mathbb{R}^3} \}$
$= \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid f_h(v) = 0_{\mathbb{R}} v \} = V_0$

Oss Il nucleo di un app. lineare è l'autospazio

Oss Il nucleo di un app. lineare è l'autospazio relativo all'autovalore 0.

$\forall h \quad \dim \operatorname{Ker} f_h \geq 1 \Rightarrow \forall h \quad \dim V_0 \geq 1$

$\Rightarrow \forall h$ ho l'autovalore 0

λ autovalore $\Leftrightarrow P_{M_h}(\lambda) = 0$

$$P_{M_h}(\lambda) = \det(M_h - \lambda Id)$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & h-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= 0\,[\;] + 0\,[\;] + (h-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (h-\lambda)\left[(1-\lambda)(2-\lambda) - 2 \cdot 1\right]$$

$$= (h-\lambda)\left[\cancel{2} - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - \cancel{2}\right]$$

$$= (h-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda)$$

$$= \lambda (h-\lambda)(\lambda - 3)$$

Gli autovalori sono $0, h, 3$ con $h \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{CASO 1}}$ Se $h \neq 0$ e $h \neq 3$, M_h ha 3 autovalori distinti $(0, h, 3)$

Dunque M_h è diagonalizzabile.

Dunque M_h è diagonalizzabile.

$$\mathbb{R}^3 \supseteq V_0 \oplus V_3 \oplus V_h$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 \leq mg(0) = \dim V_0 \\ 1 \leq mg(3) = \dim V_3 \\ 1 \leq mg(h) = \dim V_h \end{array}\right\} \Rightarrow \dim V_0 \oplus V_3 \oplus V_h \geq 3$$

$V_0 \oplus V_3 \oplus V_h \subseteq \mathbb{R}^3$ e $\dim V_0 \oplus V_3 \oplus V_h = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow V_0 \oplus V_3 \oplus V_h = \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow \exists$ una base formata da autovettori

$\Longleftrightarrow M_h$ è diagonalizzabile

$\boxed{\text{CASO 2}}$ $h = 3$ $\quad P_{M_3}(\lambda) = \lambda(\lambda-3)^2$

Gli autovalori sono $0, 3, 3$

$$1 \leq \underset{\dim V_0}{\underset{=}{mg(0)}} \leq ma(0) = 1$$

$\Rightarrow mg(0) = ma(0) \Rightarrow 0$ non crea problemi per la diagonalizzazione.

$$1 \leq mg(3) \leq ma(3) = 2$$

$$1 \leq mg(3) \leq ma(3) = 2$$

Se $mg(3) = 1$ allora $mg(3) \neq 2 = ma(3)$
e dunque M_3 non è diagonalizzabile

$$V_3 = \operatorname{Ker}(M_3 - 3\,Id)$$

$$= \operatorname{Ker}\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{rk(M_3 - 3Id) = 2}$$

$$M_h = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\dim \mathbb{R}^3}_{3} = \underbrace{\dim \operatorname{Ker}(M_3 - 3Id)}_{1} + \underbrace{rk(M_3 - 3Id)}_{2}$$

$$\underbrace{\dim V_3}_{= mg(3)} = \dim \operatorname{Ker}(M_3 - 3Id) = 1$$

$$1 = mg(3) \neq ma(3) = 2$$

$\Rightarrow$ M_3 non è diagonalizzabile

$$\underbrace{\mathbb{R}^3}_{\dim 3} \not\cong \underbrace{V_3}_{\dim 1} \oplus \underbrace{V_0}_{\dim 1}$$

Non riesco a costruire una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di T.

CASO 3 $\quad h = 0$

$$p_{M_0}(\lambda) = \lambda^2 (\lambda - 3)$$

Gli autovalori sono $0, 0, 3$

$$1 \leq mg(3) \leq ma(3) = 1$$

$\Rightarrow mg(3) = ma(3)$

$\Rightarrow$ 3 non crea problemi

$$V_0 = \operatorname{Ker}(M_0 - 0\, Id) = \operatorname{Ker} M_0 = \operatorname{Ker} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{rk\, 2}$$

$$\underbrace{\dim \mathbb{R}^3}_{3} = \underbrace{\dim \operatorname{Ker} M_0}_{1} + \underbrace{rk\, M_0}_{2}$$

$$\dim V_0 = mg(0) = 1 < 2 = ma(0)$$

poiché $p_{M_0}(\lambda) = \lambda^2 (\lambda - 3)$

$\Rightarrow mg(0) \neq ma(0)$

$\Rightarrow M_0$ non è diagonalizzabile

$$\underbrace{\mathbb{R}^3}_{\dim 3} \underset{\neq}{\supset} \underbrace{\underbrace{V_0}_{\dim 1} \oplus \underbrace{V_3}_{\dim 1}}_{\dim 2}$$

Non riesco a creare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori

Es $\quad A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2+k & -1 \\ k+1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{33}(\mathbb{R}),\ k \in \mathbb{R}$

$\Updownarrow$

$f_k : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ endomorfismo.
$\quad X \longmapsto A_k X$

① Determinare per quali valori di k, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ autovettore $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $f_k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$f_k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow A_k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2+k & -1 \\ k+1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \cancel{1}+2+k-\cancel{1} \\ k+1+1 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2+k \\ k+2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2+k=\lambda \\ k+2=\lambda \\ 2=\lambda \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ k = \lambda - 2 = 0 \end{cases}$$

Per $k=0$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore relativo all'autovalore $\lambda = 2$, cioè $f_0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2 Determinare per quali valori di k, 1 è autovalore.

λ autovalore di f_k (o di A_k) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\ v \neq \vec{0}_{\mathbb{R}^3}$ t.c. $f_k(v) = \lambda v$ $\Longleftrightarrow$ λ è zero del polinomio caratteristico di A_k cioè $p_{A_k}(\lambda) = \det(A_k - \lambda I_3) = 0$

1 autovalore $\Longleftrightarrow$ $p_{A_k}(1) = 0 = \det(A_k - 1 I_3)$

$$0 \overset{?}{=} p_{A_k}(1) = \det\left(A_k - 1\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\left[\begin{pmatrix}1 & 2+k & -1\\ k+1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]$$

$$= \det\begin{pmatrix}0 & 2+k & -1\\ k+1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

31 32 33

$$= \underbrace{(-1)^{3+1}\cdot 0\cdot \det\begin{pmatrix}2+k & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}}_{0} +$$

$$+ (-1)^{3+2}\cdot 1\cdot \det\begin{pmatrix}0 & -1\\ k+1 & 1\end{pmatrix}$$

$$+ \underbrace{(-1)^{3+3}\cdot 0 \cdot \det \det\begin{pmatrix}0 & 2+k\\ k+1 & -1\end{pmatrix}}_{0}$$

$$= (-1)\cdot 1 \cdot \left[\underbrace{0\cdot 1}_{0} - (k+1)(-1)\right]$$

$$= -1\left[k+1\right]$$

$$= -k-1 = 0 \iff k = -1$$

1 è autovalore per $k=-1$ cioè per A_{-1}.

Es: Sia $f: \mathbb{R}[x]^{\le 3} \longrightarrow \mathbb{R}[x]^{\le 3}$

Sia $\mathcal{B} = \{1, 1+x, x^2, -x^2+x^3\}$ una

Sia $\mathcal{B} = \{1, 1+x, x^2, -x^2+x^3\}$ una base di $\mathbb{R}[x]^{\leq 3}$

(base canonica di $\mathbb{R}[x]^{\leq 3}$ è $\{1, x, x^2, x^3\}$)

Sia
$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f(1+x) = 1+x \end{array}\right\} \text{1, 1+x sono autovettori relativi all'autovalore 1}$$
$$f(x^2) = x^3$$
$$f(-x^2+x^3) = x^3$$

Calcolare autovalori, autovettori e dire se f è diagonalizzabile.

Calcoliamo $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \left((f(1))_{\mathcal{B}}, (f(1+x))_{\mathcal{B}}, (f(x^2))_{\mathcal{B}}, (f(x^3-x^2))_{\mathcal{B}} \right)$

$\mathcal{B} = \{1, 1+x, x^2, x^3-x^2\}$

$$f(1) = 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = 1(1) + 0(1+x) + 0(x^2) + 0(x^3-x^2)$$

$$f(1+x) = 1+x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = 0(1) + 1(1+x) + 0(x^2) + 0(x^3-x^2)$$

$$f(x^2) = x^3 = \underset{0}{\lambda_1}(1) + \underset{0}{\lambda_2}(1+x) + \underset{1}{\lambda_3}(x^2) + \underset{1}{\lambda_4}(x^3-x^2)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$f(x^3 - x^2) = x^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A ha 3 colonne LI $\Rightarrow$ $rk(A) = \dim \operatorname{Im} f = 3$

$$\underbrace{\dim \mathbb{R}[x]^{\leq 3}}_{4} = \underbrace{\dim \operatorname{Ker} f}_{1} + \underbrace{rk(A)}_{3}$$

$\operatorname{Ker} f = V_0 \Rightarrow f$ ha come autovalore 0

$$P_A(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-x \end{pmatrix}$$

$$= (1-x)(1-x)\, x\, (x-2)$$

Gli autovalori sono 1, 1, 0, 2

$ma(1) = 2$

$ma(0) = 1$

$ma(2) = 1$

Gli autovalori sono 1, 1, 0, 2

$ma(1) = 2$

$ma(0) = 1$

$ma(2) = 1$

Devo calcolare $mg(1) = \dim V_1$

$mg(0) = \dim V_0$

$mg(2) = \dim V_2$

Poiché $1 \leq mg(0) \leq ma(0) = 1$
ho che $mg(0) = ma(0) \Rightarrow 0$ non crea problemi
Poiché $1 \leq mg(2) \leq ma(2) = 1$
ho che $mg(2) = ma(2) \Rightarrow 2$ non crea problemi

L'unico autovalore che crea problemi può essere 1 poiché so $1 \leq mg(1) \leq ma(1) = 2$

Se $mg(1) = 1 \Rightarrow A$ non è diagonalizzabile

$$V_1 = \{ v \mid f(v) = 1 v \}$$
$$= \operatorname{Ker}(A - 1\, Id_4)$$
$$= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-1 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$rk\ 2$

$$\underbrace{\dim \mathbb{R}[x]^{\leq 3}}_{4} = \underbrace{\dim \operatorname{Ker}(A - 1\,Id)}_{2} + \underbrace{rk(A - 1\,Id)}_{2}$$

$$\Rightarrow \quad mg(1) = \dim V_1 = \dim \operatorname{Ker}(A - 1\,Id) = 2 = ma(1)$$

$\Rightarrow$ anche l'autovalore 1 non crea problemi.

$$V_1 = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} d = 0 \\ c = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \right\} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \right\rangle \qquad \mathcal{B} = \{1,\ 1+x,\ x^2,\ x^3 - x^2\}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = 1\,(1) + 0\,(1+x) + 0\,(x^2) + 0\,(x^3 - x^2)$$
$$= 1$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = 0\,(1) + 1\,(1+x) + 0\,(x^2) + 0\,(x^3 - x^2)$$
$$= 1 + x$$

$$V_1 = \langle 1,\ 1+x \rangle$$