Es Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \iff f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$X \longmapsto AX$

① Calcolare gli autovalori di A

λ autovalore $\iff p_A(\lambda) = 0$

$$p_A(x) = \det(A - x\,Id_3) = \det \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2-x & 1 & 0 \\ 1 & 2-x & 0 \\ 0 & 0 & 3-x \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} 31 & \quad 32 & \quad 33 \end{matrix} \end{array}$$

$$= \underbrace{(-1)^{3+1} \cdot 0 \cdot \det}_{0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2-x & 0 \end{pmatrix} + \underbrace{(-1)^{3+2} \cdot 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 2-x & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{0}$$

$$+ (-1)^{3+3} (3-x) \det \begin{pmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 2-x \end{pmatrix}$$

$$= (3-x)\left[(2-x)^2 - 1\right]$$

$$= (3-x)\left(4 - 4x + x^2 - 1\right]$$

$$= (3-x)\underbrace{(x^2 - 4x + 3)}_{3 \text{ e } 1} = \overset{3}{\overline{(3-x)}}\,\overset{3}{\overline{(3-x)}}\,\overset{1}{\overline{(1-x)}}$$

$$= (3-x)^{2}(1-x)^1$$

Gli autovalori di A sono 3, 3, 1

$ma(3) = 2 \qquad ma(1) = 1$

A diagonalizzabile $\overset{\text{def}}{\iff}$

$\exists$ base di $\mathbb{R}^3$ formata di autovettori $\iff$

tutti gli autovalori sono reali $(3, 3, 1 \in \mathbb{R})$

e $ma(3) = \underbrace{mg(3)}_{\dim V_3}$ e $ma(1) = \underbrace{mg(1)}_{\dim V_1}$

$\iff \mathbb{R}^3 = V_3 \oplus V_1$

A ha tutti gli autovalori reali.

(2) A è diagonalizzabile?

Poiché gli autovalori sono reali devo solo verificare che $ma(3) = mg(3)$ e $ma(1) = mg(1)$

$$V_1 = \mathrm{Ker}(A - 1\,Id) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad rk\ 2$$

$$\underbrace{\dim \mathbb{R}^3}_{3} = \underbrace{\dim \mathrm{Ker}(A - 1\,Id)}_{1} + \underbrace{rk(A - 1\,Id)}_{2}$$

$\Leftarrow$

$mg(1) = \dim V_1 = 1$

Dal punto (1) so che $ma(1) = 1$

Dunque $mg(1) = ma(1) \Rightarrow$ l'autovalore 1

Dunque $mg(1) = ma(1)$ $\Rightarrow$ l'autovalore 1 non crea problemi per la diagonalizzazione

$$V_1 = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z = 0 \\ y = -x \end{cases}$$

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{Sia } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_3 = \operatorname{Ker}(A - 3\,Id) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad rk\ 1$$

$$\underbrace{\dim \mathbb{R}^3}_{3} = \underbrace{\dim \operatorname{Ker}(A - 3\,Id)}_{2} + \underbrace{rk(A - 3\,Id)}_{1}$$

$\Leftarrow$

$$mg(3) = \dim V_3 = 2 = ma(3)$$

$\Rightarrow$ L'autovalore 3 non crea problemi per la diagonalizzazione

$$V_3 = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$-x + y = 0 \iff x = y$$

$$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$v_3^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori 3, 3, 1 di A sono reali

e $mg(3) = ma(3)$ e $mg(1) = ma(1)$

$\Rightarrow$ A è diagonalizzabile

Oss: $\mathbb{R}^3 \supseteq \underbrace{V_3}_{\dim 2} \oplus \underbrace{V_1}_{\dim 1}$

$\dim V_3 + V_1 = \dim V_3 + \dim V_1 - \underbrace{\dim V_3 \cap V_1}_{0}$

poiché $V_3 \oplus V_1$

$\dim V_3 \oplus V_1 = 2 + 1 = 3$

$V_3 \oplus V_1 \subseteq \mathbb{R}^3$, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, $\dim V_3 \oplus V_1 = 3$

$\Rightarrow V_3 \oplus V_1 = \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ A è diagonalizzabile

Oss $\quad p_A(x) = \overbrace{x^{8}}^{0} \, \overbrace{(x-2)^{3}}^{2} \, \overbrace{(x-10)^{4}}^{10} \, \overbrace{(x-6)}^{6}$

$ma(0) = 8 \qquad ma(10) = 4$

$ma(0) = 8$ $\quad ma(10) = 4$

$ma(2) = 3$ $\quad ma(6) = 1$

---

③ Determinare H che diagonalizza A cioè cerco $H \in M_{33}(\mathbb{R})$ invertibile t.c.

$H^{-1}AH$ è diagonale.

Sia $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ un generatore di $V_1 = \langle v_1 \rangle$

v_1 è base di V_1

$V_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad v_3^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_3^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

v_3^1 e v_3^2 sono LI $\Rightarrow \{v_3^1 \text{ e } v_3^2\}$ è base di V_3

$\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_3 \Rightarrow \{v_1, v_3^1, v_3^2\}$ è base di $\mathbb{R}^3$

(autovettori relativi ad autovalori distinti sono LI. Questo mi assicura che v_1, v_3^1, v_3^2 sono LI)

$\mathcal{B} = \{v_1, v_3^1, v_3^2\} \qquad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} (f(v_1))_{\mathcal{B}} & (f(v_3^1))_{\mathcal{B}} & (f(v_3^2))_{\mathcal{B}} \end{array} \end{array}$

$(f(v_1))_{\mathcal{B}} \quad (f(v_3^1))_{\mathcal{B}}$

$v_1 \in V_1$

$$f(v_1) \overset{\uparrow}{=} 1 v_1 = 1 v_1 + 0 v_3^1 + 0 v_3^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$v_3^1 \in V_3$

$$f(v_3^1) \overset{\uparrow}{=} 3 v_3^1 = 0 v_1 + 3 v_3^1 + 0 v_3^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$v_3^2 \in V_3$

$$f(v_3^2) \overset{\uparrow}{=} 3 v_3^2 = 0 v_1 + 0 v_3^1 + 3 v_3^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

M tale che $M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$ è il cambiamento di base $\mathcal{B}$ alla base canonica

$$M = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1, & v_3^1, & v_3^2 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

coordinate dei vettori della base $\mathcal{B} = \{v_1, v_3^1, v_3^2\}$ rispetto alla base canonica

<u>Oss</u> Sia $\mathcal{B}' = \{v_3^1, v_3^2, v_1\}$

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M' = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \quad v_3^1 \quad v_3^2 \quad v_1 \end{array}$$

$$\mathcal{B} = \{ v_3^1, v_1, v_3^2 \} \qquad \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

$$v \in V_3 \iff f(v) = 3v$$

<u>Es</u> $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile?

$$p_A(x) = \det(A - x\,\mathrm{Id})$$
$$= \det\begin{pmatrix} -x & 1 \\ 0 & -x \end{pmatrix} = x^2 - 0 \cdot 1 = x^2$$
$$= x\ x$$

Gli autovalori di A sono 0, 0

$ma(0) = 2$

Gli autovalori di A sono in $\mathbb{R}$ $(0 \in \mathbb{R})$.
e dunque per verificare che A è diagonalizzabile devo dimostrare che $\underset{\substack{= \\ \dim V_0}}{mg(0)} = ma(0)$

$$V_0 = \operatorname{Ker}(A - 0\,\mathrm{Id}) = \operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{rk}\ 1$$

$$\underbrace{\dim \mathbb{R}^2}_{2} = \underbrace{\dim \operatorname{Ker}(A - 0\, I_2)}_{1} + \underbrace{rk(A - 0\, I_2)}_{1}$$

$\Leftarrow$

$$mg(0) = \dim V_0 = \dim \operatorname{Ker}(A - 0\, I_2) = 1$$

$$ma(0) = 2$$

$$\Rightarrow \quad mg(0) = 1 \neq 2 = ma(0)$$

$\Rightarrow$ A non è diagonalizzabile

Es $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in Mat_{2,2}(\mathbb{R}) \iff f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $X \longmapsto AX$

① Stabilire se 1 è autovalore

1 autovalore $\iff$ $p_A(1) = 0$

$$p_A(x) = \det(A - x\, I_2) = \det\begin{pmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 2-x \end{pmatrix}$$

$$= [(2-x)^2 - 1]$$

$$= 4 - 4x + x^2 - 1 = x^2 - 4x + 3$$

$$p_A(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 0$$

1 è autovalore di A

$$V_1 = \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid f(v) = 1\, v \}$$

$= \ker(A - 1\,\mathrm{Id}) = \ker\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ rk 1

$$\underbrace{\dim \mathbb{R}^2}_{2} = \underbrace{\dim V_1}_{1} + \underbrace{\mathrm{rk}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{1}$$

$$mg(1) = \dim V_1 = 1$$

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\} \qquad x + y = 0 \iff y = -x$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 66 \\ -66 \end{pmatrix} \right\rangle$$

② Stabilire se $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore.

$v \in \mathbb{R}^2$ è autovettore di A (o di f) $\iff$

$$f(v) = \lambda v \iff A\,(v)_e = \lambda\,(v)_e$$

e t.c. $M_e^e(f) = A$

$\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ?$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \lambda = 3$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore relativo all'autovalore 3

$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ è un autovettore relativo all'autovalore 3

cioè $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \in V_3 = \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid L(v) = 3v \}$

$mg(3) = \dim V_3 \geq 1$ poiché $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \in V_3$

(3) A è diagonalizzabile

A diagonalizzabile $\Leftrightarrow \mathbb{R}^2 = V_1 \oplus V_3$

$$\left.\begin{array}{l} 1 \neq 3 \Rightarrow V_1 \cap V_3 = \{\vec{0}_{\mathbb{R}^2}\} \\ \Leftrightarrow V_1 \oplus V_3 \end{array}\right\} (*)$$

$\dim V_1 = 1 \qquad \dim V_3 \geq 1$

$$\dim V_1 + V_3 = \underbrace{\dim V_1}_{= 1} + \underbrace{\dim V_3}_{\geq 1} - \underbrace{\dim V_1 \cap V_3}_{0}$$

$\dim V_1 + V_3 \geq 2$, $V_1 + V_3 \subseteq \mathbb{R}^2$, $\dim \mathbb{R}^2 = 2$

$\Rightarrow \dim V_1 + V_3 = 2$ e $V_1 + V_3 = \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow V_1 \oplus V_3 = \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ A è diagonalizzabile

$\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ autovalori distinti ($\lambda_i \neq \lambda_j$ per $i \neq j$)

$\Rightarrow V \oplus V \oplus \ldots \oplus V$

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ autovalori distinti ($\lambda_i \neq \lambda_j$ per $i \neq j$)

$\Rightarrow V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$

---

④ Stabilire M t.c. $M^{-1}AM$ sia diagonale

$V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ $\qquad$ $V_3 \ni \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\dim V_3 = 1$

$\Rightarrow V_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Una base di V_1 è $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e una base di V_3 è $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$M = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}}_{v_1} & \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}}_{v_3} \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 3 \end{pmatrix}$$

⑤ Calcolare $A^{40} = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{40 \text{ volte}}$

Sia $\Delta = M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$\Delta^2 = \Delta \cdot \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta^3 = \Delta^2 \Delta = \begin{pmatrix} 1^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta^{40} = \begin{pmatrix} 1^{40} & 0 \\ & \end{pmatrix}$$

$$D^{40} = \begin{pmatrix} 1^{40} & 0 \\ 0 & 3^{40} \end{pmatrix}$$

<u>Oss</u> $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^{n} = \begin{pmatrix} a^{n} & 0 \\ 0 & b^{n} \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} A M = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \iff$$

Moltiplico a sinistra per M

$$\underbrace{M M^{-1}}_{Id} A M = M D \iff$$

$$A M = M D$$

Moltiplico a destra per M^{-1}

$$A \underbrace{M M^{-1}}_{Id} = M D M^{-1}$$

$$A \overset{*}{=} M D M^{-1}$$

$$A^{3} = A \quad A \quad A$$

$$\overset{*}{=} M D \underbrace{M^{-1} \quad M}_{0} D \underbrace{M^{-1} \quad M}_{0} D M^{-1}$$

$$= M \ D D D \ M^{-1}$$

$$= H \, \Delta^3 \, H^{-1}$$

$$A^{40} = H \, \Delta^{40} \, H^{-1} = H \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{40} H^{-1}$$

$$= H \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{40} \end{pmatrix} H^{-1}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Per calcolare H^{-1}

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{\overbrace{\hphantom{1\quad 1}}^{H}} & \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\hphantom{1\quad 0}}^{Id}} \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_2 + R_1 \qquad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\frac{1}{2} R_2 \qquad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$R_1 - R_2 \qquad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ \multicolumn{2}{c|}{\underbrace{\hphantom{1\quad 0}}_{Id}} & \multicolumn{2}{c}{\underbrace{\hphantom{1/2\quad -1/2}}_{H^{-1}}} \end{array}\right)$$

$$A^{40} = H \, \Delta^{40} \, H^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{40} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3^{40} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3^{40} \\ -1 & 3^{40} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 + \frac{3^{40}}{2} & -1/2 + \frac{3^{40}}{2} \\ -1/2 + \frac{3^{40}}{2} & \frac{1}{2} + \frac{3^{40}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{H \text{ cambiamento di base} \Rightarrow \exists H^{-1}}$$

$$\boxed{\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow rk(A) = n \quad \text{con } A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})}$$