martedì 14 novembre 2023 10:53

DIAGONALIZZAZIONE

Sia $f: V \to V$ un endomorfismo (app. lineare tale che dominio = codominio)

Def $v \in V$, $v \neq 0_V$ è detto AUTOVETTORE se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $f(v) = \lambda v$
Lo scalare λ è detto AUTOVALORE relativo all'autovettore v

Def $f: V \to V$ (endomorfismo) è detto DIAGONALIZZABILE se esiste una base di V formata da autovettori
In termini matriciali sia $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$
Allora A è DIAGONALIZZABILE se esiste una matrice invertibile M tale che

$$M^{-1} A M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Def Sia $\lambda \in \mathbb{R}$
$V_\lambda = \{ v \in V \mid f(v) = \lambda v \}$
= l'insieme degli autovettori relativi

= l'insieme degli autovettori relativi all'autovalore λ

V_λ è detto <u>AUTOSPAZIO</u> relativo all'autovalore λ

<u>Oss</u> $f : V \longrightarrow V$

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &= \{ v \in V \mid f(v) = \vec{0}_V \} \\ &= \{ v \in V \mid f(v) = 0_{\mathbb{R}} \vec{0}_V \} \\ &= \{ v \in V \mid f(v) = 0_{\mathbb{R}} v \} \\ &= V_0 \end{aligned}$$

$\operatorname{Ker} f$ è l'autospazio relativo all'autovalore 0.

$$V_\lambda = \{ v \in V \mid f(v) = \lambda v \}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\}$$

$A = M_e^e(f)$

e base canonica

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; (A - \lambda I_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n) \qquad I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$\exists$ autovettori relativi all'autovalore $\lambda \iff$

$V_\lambda \neq \{\vec{0}_V\} \iff \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{\vec{0}_V\} \iff$

$\dim \ker (A - \lambda I_n) \geq 1$

$$n = \dim \mathbb{R}^n = \underset{\substack{\vee\!/ \\ 1}}{\dim \ker (A - \lambda I_n)} + \underset{\substack{\wedge \\ n}}{\operatorname{rg}(A - \lambda I_n)}$$

$\iff \quad rk(A - \lambda I_n) < n$

$\iff \quad p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0$

$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) \in \mathbb{R}[\lambda]$ è detto polinomio caratteristico di A (o di f)

<u>Lemma</u>

λ autovalore $\iff$ $p_A(\lambda) = 0$.

<u>Es</u> Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ data da $f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \overset{\circledast}{=} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$

Sia $\mathcal{C} = \{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ base canonica di $\mathbb{R}^2$

$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad\qquad$ $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$a = 1$ e $b = 0$ in $\circledast$ $\qquad\qquad$ $a = 0$ e $b = 1$ in $\circledast$

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \end{array} \end{array} = A$$

$f(e_1) \quad f(e_2)$

$$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 1 & 0-\lambda \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= [(-\lambda)(-\lambda) - 1 \cdot 1]$$

$= \lambda^2 - 1$ polinomio caratteristico di A

$\in \mathbb{R}[\lambda]$ di grado 2 poiché A è 2×2

Gli autovalori di f (o di A) sono gli zeri di $p_A(\lambda)$, cioè sono i λ per cui $p_A(\lambda) = 0$

$\lambda^2 - 1 = 0 \iff \lambda = 1$ oppure $\lambda = -1$

Gli autovalori di A sono 1 e -1

$$V_1 = \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid f(v) = 1 v \}$$

$$= \operatorname{Ker}(A - 1 I_2)$$

$$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0-1 & 1 \\ 1 & 0-1 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \right\}$$

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \; x_2 = x_1 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad A v_1 = 1 v_1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

v_1 è autovettore relativo all'autovalore 1

$$V_{-1} = \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid f(v) = (-1)v \}$$

$$= \mathrm{Ker}(A - (-1) I_2)$$

$$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0+1 & 1 \\ 1 & 0+1 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \right\} \qquad x_2 = -x_1$$

$$= < \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} > = < \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} >$$

$$v_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in V_{-1}$$

Verifichiamo che $f(v_{-1}) = (-1)\, v_{-1}$

$$f(v_{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = - v_{-1}$$

v_{-1} è l'autovettore relativo all'autovalore -1.

Verifichiamo che v_1 e v_{-1} sono LI

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_{-1} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_2 \\ \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

v_1, v_{-1} sono LI in $\mathbb{R}^2$, $\dim \mathbb{R}^2 = 2$

$\Rightarrow \{v_1, v_{-1}\}$ è base di $\mathbb{R}^2$

Ho trovato una base di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori dunque f (o A) è DIAGONALIZZABILE

Oss autovettori relativi ad autovalori distinti sono LI.

Calcoliamo $V_1 \cap V_{-1}$

$V_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \qquad V_{-1} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$

$$v \in V_1 \cap V_{-1} \iff v \in V_1 \text{ e } v \in V_{-1}$$
$$\iff v = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } v = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\iff \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ -\mu \end{pmatrix}$$
$$\iff \lambda = \mu \quad \lambda = -\mu$$
$$\iff \lambda = \mu = 0$$
$$\iff v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_1 \cap V_{-1} = \{ \vec{0}_V \}$$

Oss Autospazi relativi ad autovalori distinti sono in somma diretta cioè $V_1 \oplus V_{-1}$.

$\mathcal{C} = \{ e_1, e_2 \} \qquad M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B} = \{ v_1, v_{-1} \}$

$\mathcal{B} = \{ v_1, v_{-1} \}$

Calcoliamo $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array}\right) & \\ (f(v_1))_{\mathcal{B}} \quad (f(v_{-1}))_{\mathcal{B}} & \end{array} \rightarrow$ $\boxed{\text{DIAGONALE}}$

$$f(v_1) = 1\, v_1 = 1\, v_1 + 0\, v_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$f(v_{-1}) = -1\, v_{-1} = 0\, v_1 + (-1)\, v_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

La matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ ha nella diagonale gli autovalori di f

La matrice di cambiamento di base M tale che

$$M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

è $M = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{array}\right) \\ \uparrow \quad\; \uparrow \\ v_1 \quad v_{-1} \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Oss Se scelgo la base $\tilde{\mathcal{B}} = \{v_{-1}, v_1\}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad v_{-1} \quad v_1$$

Lemma $f: V \to V$

$V_\lambda = \{v \in V \setminus \{\vec{0}_V\} \mid f(v) = \lambda v\} \cup \{\vec{0}_V\}$

è un sottospazio vettoriale di V

$f: V \longrightarrow V$ endomorfismo

$$\begin{tikzcd}
\underset{e}{V} \arrow[r, "A = M^e_e(f)"] & \underset{e}{V} \arrow[d, "H^{-1} = M^{e'}_e(Id_V)"] \\
\underset{e'}{V} \arrow[u, "H = M^e_{e'}(Id_V)"] \arrow[r, "B = M^{e'}_{e'}(f)"'] & \underset{e'}{V}
\end{tikzcd}$$

$B = H^{-1} A H \iff A$ e B simili

$\iff A$ e B rappresentano lo stesso endomorfismo $f: V \to V$ rispetto a basi diverse

Teorema

① A e B simili $\Rightarrow$ $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$

② A e B simili $\Rightarrow$ $\det A = \det B$

A e B simili $\Leftrightarrow$ $\exists\, H$ invertibile t.c.

$$B \overset{(*)}{=} H^{-1} A H$$

dim ①

$$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(*)}{=} \det(H^{-1} A H - \lambda I)$$

$$= \det(H^{-1} A H - \lambda H^{-1} I H)$$

$$= \det(H^{-1} (A - \lambda I) H)$$

Teorema di Binet

$\det(AB) = \det A \det B$

$$= \det(H^{-1}) \det(A - \lambda I) \det(H)$$

$$= \underbrace{\det(H^{-1})}_{\in \mathbb{R}} \, p_A(\lambda) \, \underbrace{\det(H)}_{\in \mathbb{R}} \in \mathbb{R}[\lambda]$$

$$= \det(H^{-1}) \det(H) \, p_A(\lambda)$$

$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$

$$= (\det H)^{-1} \det(H) \, p_A(\lambda)$$

$$= p_A(\lambda)$$

dim ②

$$\det B = \det(H^{-1} A H)$$

Teorema di Binet

$$= \det(M^{-1}) \det(A) \det(M)$$

$\det(M^{-1}) = (\det M)^{-1}$

$$= (\det M)^{-1} \det(A) \det(M) \in \mathbb{R}$$

$$= (\det M)^{-1} \det(M) \det(A)$$

$$= \det(A)$$

Oss

$$\begin{array}{ccccc} & & rk(A) = rk(B) & & \\ & & \Uparrow & & \\ tr(A) = tr(B) & \Leftarrow & A \text{ e } B \text{ simili} & \Rightarrow & \det A = \det B \\ & & \Downarrow & & \\ & & p_A(\lambda) = p_B(\lambda) & & \end{array}$$

Nessuna di queste frecce si inverte

Def $A = (a_{ij}) \in Mat_{nn}(\mathbb{R})$

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Lemma V_λ è un sottospazio vettoriale dim: Verifichiamo che V_λ è chiuso rispetto alla +

$v_1, v_2 \in V_\lambda = \{ v \mid f(v) = \lambda v \}$

cioè $f(v_1) \overset{*}{=} \lambda v_1$ e $f(v_2) \overset{*}{=} \lambda v_2$

Domanda $v_1 + v_2 \in V_\lambda$?

$$f(v_1+v_2) \underset{\text{linearità}}{=} f(v_1) + f(v_2) \overset{*}{=} \lambda v_1 + \lambda v_2$$
$$= \lambda (v_1 + v_2)$$

$\Rightarrow v_1 + v_2 \in V_\lambda$

Verifichiamo che V_λ è chiuso rispetto alla moltiplicazione per uno scalare

Domanda: $v \overset{*}{\in} V_\lambda$ e $\mu \in \mathbb{R}$ allora $\mu v \in V_\lambda$?

$$f(\mu v) \underset{\text{linearità}}{=} \mu f(v) \overset{*}{=} \mu \lambda v = \lambda (\mu v)$$

$\Rightarrow \mu v \in V_\lambda$

Dunque V_λ è un sottospazio vettoriale di V