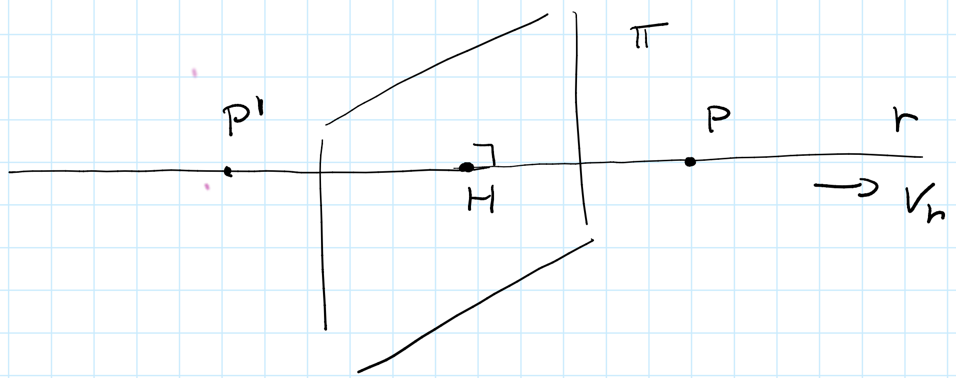
martedì 14 novembre 2023 10:57

Esercizio

Determinare il simmetrico P' del punto $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ rispetto al piano $\pi : 2x - y + z + 1 = 0$



$r \perp \pi$

H è il punto medio del segmento PP', cioè $H = \frac{P + P'}{2}$

Verifichiamo che $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \notin \pi$ (Se $P \in \pi$, $P' = P$)

$$2(-1) - (1) + (3) + 1 = -2 - 1 + 3 + 1 = 1 \neq 0$$

dunque $P \notin \pi$

$\pi : \quad 2x - y + z + 1 = 0 \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un vettore $\perp$ a π

$v_r = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad r : P + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$r : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

retta $\perp$ a π e passante per P

$H = \pi \cap r$ Per trovare H sostituisco un generico punto di r nell'equazione di π

punto di r nell'equazione di π

Un generico punto di r è $\begin{pmatrix} -1+2r \\ 1-r \\ 3+r \end{pmatrix}$ $\quad (\pi : 2x - y + z + 1 = 0)$

$$2(-1+2r) - (1-r) + (3+r) + 1 = 0$$

$$-2 + \underline{4r} - 1 + \underline{r} + 3 + \underline{r} + 1 = 0$$

$$6r + 1 = 0$$

$$r = -\frac{1}{6}$$

$$H = \begin{pmatrix} -1 + 2(-1/6) \\ 1 - (-1/6) \\ 3 + (-1/6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - \frac{1}{3} \\ 1 + 1/6 \\ 3 - 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/3 \\ 7/6 \\ 17/6 \end{pmatrix} = r \cap \pi$$

$$H = \frac{P + P'}{2} \implies 2H = P + P'$$

$$\implies P' = 2H - P$$

$$P' = 2\begin{pmatrix} -4/3 \\ 7/6 \\ 17/6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8/3 \\ 14/6 \\ 34/6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/3 \\ 8/6 \\ 16/6 \end{pmatrix}$$

= simmetrico di P rispetto al piano π

<u>Esercizio</u>

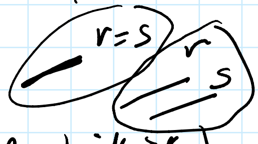
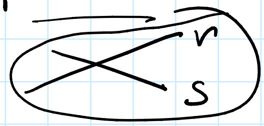
Consideriamo le rette

$$r \begin{cases} x = r \\ y = 2 + 2r \\ z = 2 + r \end{cases} \qquad s \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 + u \\ z = 3u \end{cases}$$

Determinare la posizione reciproca di queste 2 rette.

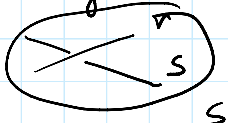
Ho 4 possibilità

r e s complanari:

1. $r = s$ (parallele coincidenti) 
2. $r /\!/ s$ ma $r \cap s = \emptyset$ (parallele distinte)
3. $r \cap s = \{pt\}$ (incidenti) 

r e s non sono complanari:

4. r e s sghembe ($r \not/\!/ s$ e $r \cap s = \emptyset$)



$$r : \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{P} + < \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_r} > \qquad s : \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{P'} + < \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{v_s} >$$

Poiché $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \not/\!/ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, cioè $< \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} > \neq < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} >$

cioè $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sono LI, cioè

$\nexists\, m \in \mathbb{R}$ t.c. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\quad r \not/\!/ s$

Rimangono 2 casi: ③ incidenti
④ sghembe.

r e s incidenti $\Leftrightarrow r \cap s \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow \exists\, u, t \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\begin{cases} r = -1 \\ \cancel{2} + 2r = \cancel{2} + u \\ 2 + r = 3u \end{cases} \Rightarrow r = -1 \Rightarrow u = -2$$

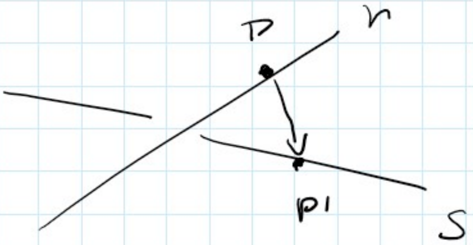
La terza equazione mi dà $2 + (-1) = 3(-2)$

$1 = -6$ ↯

$r \cap s = \emptyset$ cioè r e s sono sghembe

$r \cap s = \emptyset$ cioè r e s sono sghembe.

Altro metodo: r e s sghembe $\iff$



r e s non sono complanari $\iff$

$\overrightarrow{PP'} \cdot \underline{v_r \times v_s} \neq 0$ (prodotto misto dei 3 vettori $\overrightarrow{PP'}, v_r, v_s$)

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in r \qquad P' = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in S$$

$$\overrightarrow{PP'} = P' - P = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PP'} \cdot v_r \times v_s = \det \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \overrightarrow{PP'} \\ \leftarrow v_r \\ \leftarrow v_s \end{array}$$

$$= (-1) \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 0 \det \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} + (-2) \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -[2 \cdot 3 - 1] - 2\,[1]$$

$$= -5 - 2 = -7 \neq 0$$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{PP'}, v_r, v_s$ non sono complanari.

$\Rightarrow$ r e s sono sghembe.

<u>Esercizio</u>

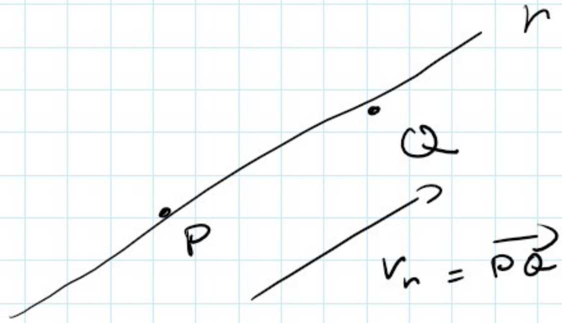
Si consideri il piano π $x + y + z + 1 = 0$

Si considera il piano π $x+y+z+1=0$

ed i punti $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$

① Scrivere l'eq. parametrica della retta r passante per P e Q

$r \quad P + \langle \overrightarrow{PQ} \rangle$



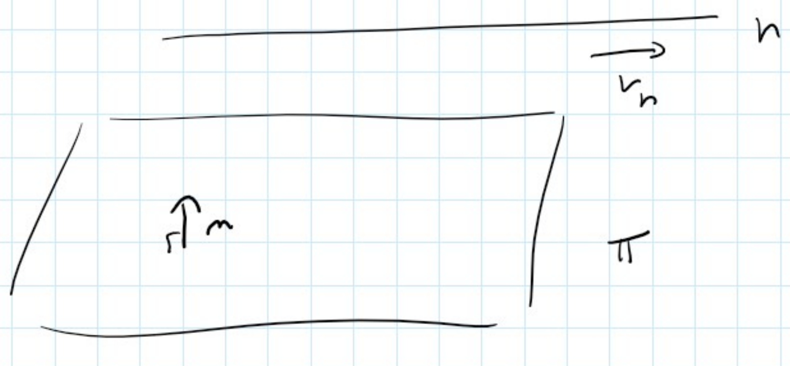
$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \alpha+1 \end{pmatrix}$$

$$r: \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \alpha+1 \end{pmatrix}}_{v_r} \rangle \qquad \begin{cases} x = -1 + 2r \\ y = +2r \\ z = -1 + r(\alpha+1) \end{cases}$$

② Trovare un vettore ortogonale a π: $x+y+z+1=0$

$$n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \pi$$

③ Per quali valori di α, la retta r è parallela a π?



$r \,//\, \pi \iff r \perp n$

$\iff v_r \perp n$

$$\iff \boxed{v_r \perp n}$$

$$\iff \boxed{v_r \cdot n = 0}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \alpha+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

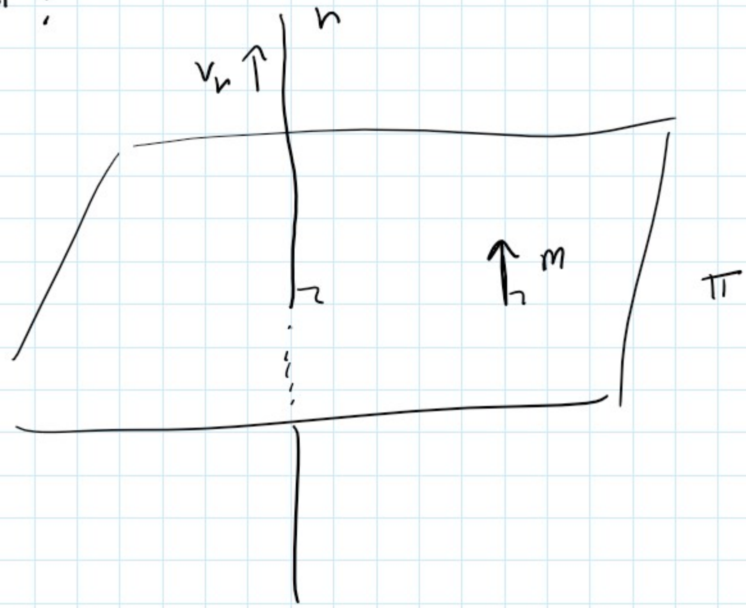
$$\iff (2 \;\; 2 \;\; \alpha+1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + (\alpha+1) \cdot 1 = 0$$

$$\iff 2 + 2 + \alpha + 1 = 0$$

$$\iff \alpha = -5$$

(4) Per quali valori di α, la retta r è perpendicolare al piano π?



$$r \perp \pi \iff \boxed{v_r \,//\, n}$$

$$\iff \langle v_r \rangle = \langle n \rangle$$

$\iff \langle v_r \rangle = \langle n \rangle$

$\iff$ v_r e n sono multipli uno dell'altro

$\iff v_r \times n = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} = v_r \times n = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & 2 & \alpha+1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow v_r \\ \leftarrow n \end{matrix}$$

$$= e_1 \det \begin{pmatrix} 2 & \alpha+1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - e_2 \det \begin{pmatrix} 2 & \alpha+1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + e_3 \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 2 & \alpha+1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} 2 & \alpha+1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Oss: $\det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$

$\iff \det \begin{pmatrix} 2 & \alpha+1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$

$\iff 2 - (\alpha+1) = 0$

$\iff 2 - \alpha - 1 = 0$

$\iff 1 = \alpha$

Altro metodo $\qquad v_r = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \alpha+1 \end{pmatrix} \qquad n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$v_r \parallel n \iff v_r = t\, n$ con $t \in \mathbb{R}$

$$\iff \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \alpha+1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}$$

$$\iff \quad t = 2 \quad e \quad \alpha + 1 = 2$$

$$\iff \quad \alpha = 2 - 1 = \underline{1}$$

$$\begin{cases} v \perp w \iff v \cdot w = 0_{\mathbb{R}} \\ v \,//\, w \iff v \times w = 0_{\mathbb{R}^3} \end{cases}$$

$\iff v = t w$ con $t \in \mathbb{R}$

$\iff \langle v \rangle = \langle w \rangle$

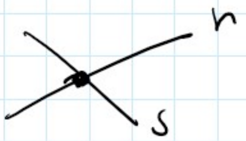
$\iff v, w$ sono LD

Esercizio

Consideriamo le rette

$$r : \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 2x = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

(1) Dopo aver verificato che r e s sono incidenti determinare l'eq. cartesiana della retta passante per $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e incidente r e s



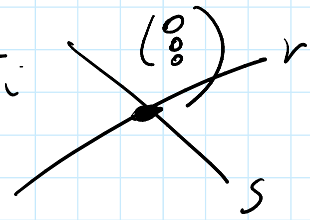
r e s incidenti $\iff r \cap s \neq \emptyset$

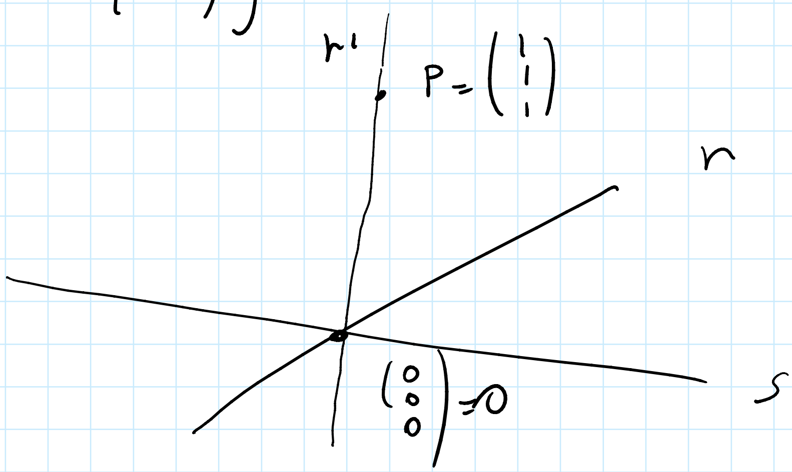
$$r \cap s = \begin{cases} x + 2y = 0 & \Rightarrow 2y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \\ y - z = 0 & \Rightarrow y = z \\ 2x = 0 & \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

$$r \cap s = \begin{cases} y - z = 0 & \Rightarrow y = z \\ 2x = 0 & \Rightarrow \underline{x = 0} \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Dalla quarta equazione ottengo $z = 0$.

$r \cap s = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow$ r e s sono incidenti





La retta r' passante per $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e incidente r e s è data dall'eq. parametrica

$$r' : P + \langle \overrightarrow{PO} \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$r' : \begin{cases} x = 1 + t & 1^\circ \\ y = 1 + t & 2^\circ \\ z = 1 + t & 3^\circ \end{cases}$$

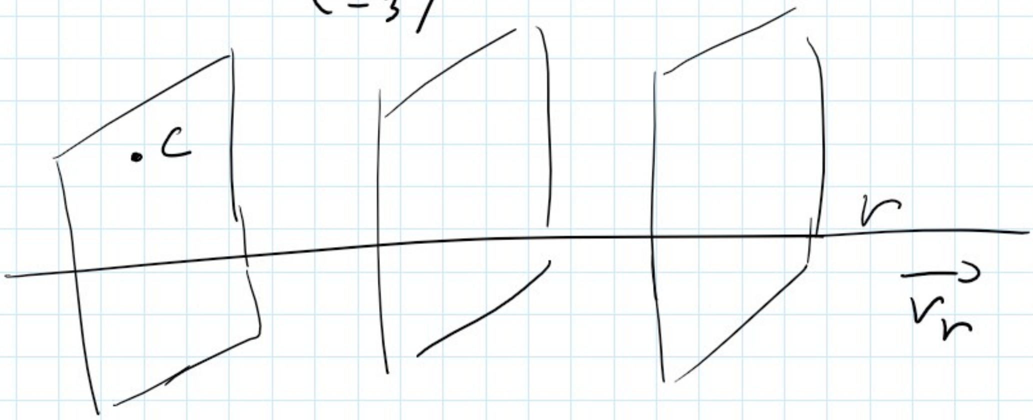
$3^\circ \Rightarrow t = z - 1$

$1^\circ \Rightarrow x = 1 + z - 1$ $\qquad$ $2^\circ \Rightarrow y = 1 + z - 1$

$x - z = 0$ $\qquad$ $y - z = 0$

L'eq. cartesiana di r' è $\begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$.

② Determinare l'eq. cartesiana del piano π passante per $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ e perpendicolare a r



$$r: \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad \pi \perp r \iff \pi \perp v_r$$

Per trovare v_r devo trovare le eq. parametriche di r

Pongo $\underline{z = r}$ $\quad \begin{cases} y - r = 0 \\ x + 2r = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = r \\ x = -2r \end{cases}$

$$r: \begin{cases} x = -2r \\ y = r \\ z = r \end{cases} \qquad r: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

L'eq. cartesiana $\quad (-2)x + (1)y + 1(z) + d = 0$

è l'eq. cartesiana di un qualsiasi piano ortogonale a r, cioè ortogonale a v_r

Per calcolare d impongo il passaggio per $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$-2 + 2 - 3 + d = 0$$

$d = 3$

$\pi \quad -2x + y + z + 3 = 0$

$A = f : V \longrightarrow W$

$Ax = b$

$f^{-1}(b) \ni X$

$f^{-1}(b) = Sol(Ax = b)$

$$\boxed{f^{-1}(b) = v + \operatorname{Ker} f}$$

con v soluzione particolare

cioè $f(v) = b$

$Av = b \qquad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

$\underline{v + \operatorname{Ker} f \subseteq f^{-1}(b)}$

$v + w$ con $w \in \operatorname{Ker} f$

$f(v + w) = f(v) + f(w) = f(v) + 0 = f(v) = b$

$\Rightarrow \quad v + w \in f^{-1}(b)$

$\underline{f^{-1}(b) \subseteq v + \operatorname{Ker} f}$

Se $z \in f^{-1}(b) \quad \Rightarrow \quad f(z) = b = f(v)$

$\Rightarrow \quad f(z) - f(v) = 0$

$\Rightarrow \quad f(z - v) = 0$

$\Rightarrow \quad z - v \in \operatorname{Ker} f$

$\Rightarrow \quad z \in v + \operatorname{Ker} f$.

$$\begin{pmatrix} 0 & \\ & 2 \end{pmatrix}$$