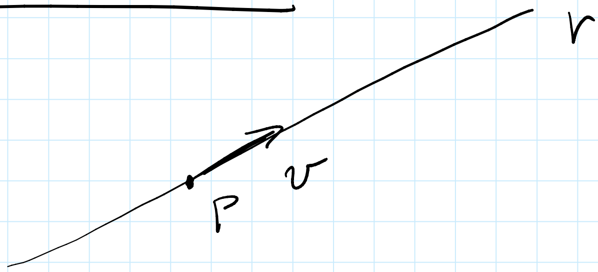
RETTE E PIANI IN $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$

RETTE in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$



$$r: \quad P + \langle v \rangle \qquad P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in r \iff X = P + tv$$

$$\iff \begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \\ z = z_0 + t\gamma \end{cases}$$ equazioni parametriche della retta r

Per ottenere le eq. cartesiane di r si elimina la t.

Es $\quad P = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Calcolare la retta passante per P e Q

$$r: \quad P + \langle \overrightarrow{PQ} \rangle$$

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eq. parametriche di r $\quad X = P + t\,\overrightarrow{PQ}$

$$\begin{cases} x = 0 + t\,2 \\ y = 2 + t\,2 \\ z = 1 + t\,1 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Eq. parametriche di r $\quad X = Q + t\,\overrightarrow{PQ}$

$$\begin{cases} x = 2 + t\,2 \\ y = 4 + t\,2 \\ z = 2 + t\,1 \end{cases}$$

Per trovare l'eq. cartesiana di r, elimino la t

$$\begin{cases} x = 2t & 1^\circ \\ y = 2 + 2t & 2^\circ \\ z = 1 + t & 3^\circ \Rightarrow \quad t = z - 1 \end{cases}$$

$1^\circ \Rightarrow x = 2(z-1)$

$\Rightarrow x = 2z - 2$

$\Rightarrow x - 2z + 2 = 0$

$2^\circ \Rightarrow y = 2 + 2(z-1)$

$\Rightarrow y = \underbrace{2}_{} + 2z \underbrace{-2}_{}$

$\Rightarrow y - 2z = 0$

Eq. <u>cartesiane di r</u>

$$\begin{cases} x - 2z + 2 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

Per passare dall'eq. cartesiana di r all'eq. parametrica fisso un parametro: $z = t$

$x - 2t + 2 = 0$

$y - 2t = 0$

$$\begin{cases} x = 2t - 2 \\ y = 2t \end{cases}$$

$$y - 2t = 0 \qquad \begin{cases} y = 2t \\ z = t \end{cases}$$

$$r : \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

PIANI IN $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$

Per descrivere un piano ho bisogno

- di 3 punti non allineati oppure
- di 1 punto e 2 vettori L I

$$P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \qquad v_1, v_2 \text{ LI}$$

$$\pi : \quad P + \langle v_1, v_2 \rangle = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \pi \iff \begin{cases} x = x_0 + \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 \\ y = y_0 + \lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2 \\ z = z_0 + \lambda_1 \gamma_1 + \lambda_2 \gamma_2 \end{cases}$$

equazioni parametriche del piano π

Come ottenere le eq. cartesiane di π?

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 \\ y = y_0 + \lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2 \\ z = z_0 + \lambda_1 \gamma_1 + \lambda_2 \gamma_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x - x_0 = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 \\ y - y_0 = \lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2 \\ z - z_0 = \lambda_1 \gamma_1 + \lambda_2 \gamma_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$z - z_0 \qquad \gamma_1 \qquad \gamma_2$$

$$X - P = \vec{PX} \in \langle v_1 , v_2 \rangle$$

$$\iff \quad \text{rg} \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} = 2$$

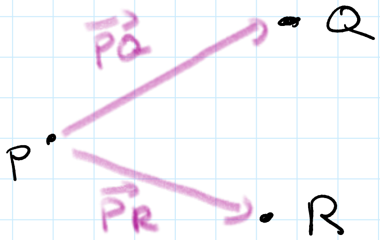
$$\iff \quad \det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} = 0$$

si ottiene l'eq. cartesiana di π.

Es Determinare il piano passante per $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Avere 3 punti non allineati $\iff$

Avere 1 punti e 2 vettori LI



avere P, Q, R $\iff$ avere P, $\vec{PQ}$, $\vec{PR}$

$\iff$ avere Q, $\vec{QP}$, $\vec{QR}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{PQ} = Q - P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{PQ} = Q - P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{PR} = R - P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Oss: $\vec{PQ} \not\parallel \vec{PR}$

Eq. parametriche π: $P + \lambda \vec{PQ} + \mu \vec{PR}$

$$\pi = P + \langle \vec{PQ}, \vec{PR} \rangle$$

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda(0) + \mu(-1) \\ y = 2 + \lambda(-1) + \mu(-1) \\ z = 0 + \lambda(0) + \mu(1) \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P + \lambda \vec{PQ} + \mu \vec{PR}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \lambda(0) + \mu(-1) \\ 2 + \lambda(-1) + \mu(-1) \\ 0 + \lambda(0) + \mu(1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = 2 - \lambda - \mu \\ z = \mu \end{cases}$$

Adesso cerco le eq. cartesiane di π

$$0 = \det \begin{pmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} X - P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{PQ} \\ \vec{PR} \end{matrix}$$

$$= (x-1) \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - 0 \det \begin{pmatrix} \; \end{pmatrix} + (-1) \det \begin{pmatrix} y-2 & z \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

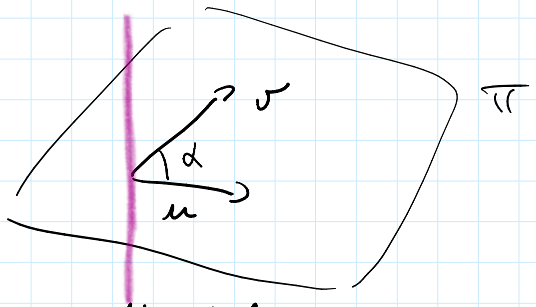
$$= (x-1)\,[-1] - [(y-2)\cdot 0 + z]$$

$$= -x + 1 - z = 0$$

eq. cartesiana di π è $x + z - 1 = 0$

PRODOTTO VETTORIALE IN $\mathbb{R}^3$

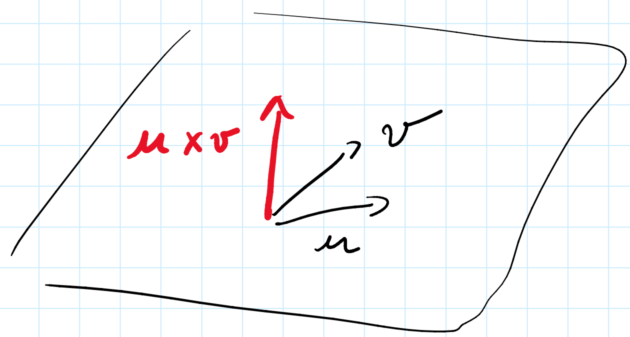
Def



Il prodotto vettoriale di u e v è il vettore di $\mathbb{R}^3$ che si scrive $u \times v$ oppure $u \wedge v$

Vale che

1. $u \times v$ ha direzione ortogonale a u e v
2. $\| u \times v \| = \| u \| \, \| v \| \, | \operatorname{sen} \alpha |$
3. il verso di $u \times v$ si determina con la regola della mano destra: si pone l'indice parallelamente ad u, il medio parallelo a v, la direzione assunta dal pollice è quella del vettore $u \times v$



Se $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ allora

$$u \times v = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

$$= e_1 \det\begin{pmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{pmatrix} - e_2 \det\begin{pmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{pmatrix} + e_3 \det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}$$

$$= e_1 \left[u_2 v_3 - v_2 u_3 \right] - e_2 \left[u_1 v_3 - v_1 u_3 \right] + e_3 \left[u_1 v_2 - v_1 u_2 \right]$$

$$= \begin{pmatrix} u_2 v_3 - v_2 u_3 \\ v_1 u_3 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - v_1 u_2 \end{pmatrix}$$

Proprietà del prodotto vettoriale

① $u \times v$ è ortogonale ad u e v

② $u \times v = 0_{\mathbb{R}^3} \iff u$ e v sono LD $\iff u \parallel v$

($u \cdot v = 0_{\mathbb{R}} \iff u \perp v$)

③ $u \times v = - v \times u$

④ $(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) \times v = \alpha_1 u_1 \times v + \alpha_2 u_2 \times v$

⑤ $\| u \times v \|$ = area del parallelogramma definito da u e v

<u>Oss</u> π $\quad P + \langle v_1, v_2 \rangle \quad v_1, v_2$ LI

Oss π $\quad P + \langle v_1, v_2 \rangle \quad v_1, v_2$ LI

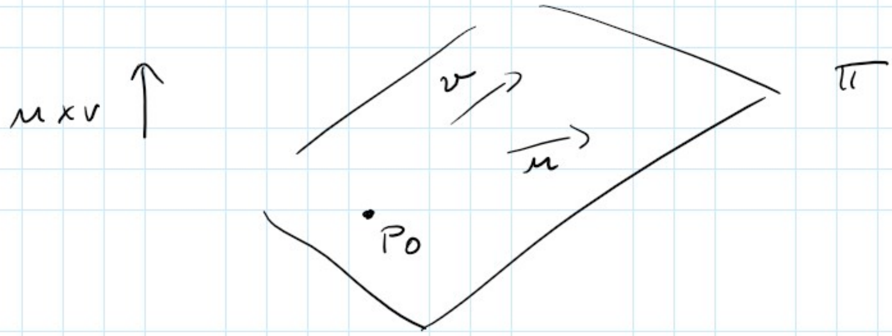
Eq. cartesiana di π $\quad ax + by + cz + d = 0$

con $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vettore ortogonale a π

Possiamo scegliere $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = v_1 \times v_2$

Es Determinare il piano π passante per $P_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

e parallelo a $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$



$$u \times v = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow u \\ \leftarrow v \end{array}$$

$$= e_1 \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - e_2 \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + e_3 \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= e_1 [-1 \cdot 0 - 1 \cdot 1] - e_2 [2 \cdot 0 - 1 \cdot 1] + e_3 [2 \cdot 1 - 1(-1)]$$

$$= e_1 (-1) - e_2 (-1) + e_3 (2 + 1)$$

$$= -e_1 + e_2 + 3e_3$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \perp \pi$$

$$\pi : \quad (-1)x + (1)y + (3)z + d = 0$$

$$-x + y + 3z + d = 0$$

$$-x + y + 3z + d = 0$$

π deve passare per $P_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, cioè $P_0 \in \pi$

$$-(-1) + (3) + 3(1) + d = 0$$

$$1 + 3 + 3 + d = 0$$

$$d = -7$$

$$\pi : \quad -x + y + 3z - 7 = 0$$

PRODOTTO MISTO IN $\mathbb{R}^3$

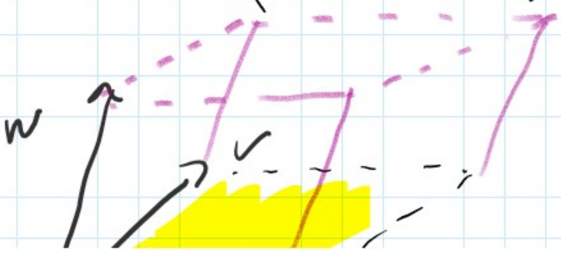
Il prodotto misto di 3 vettori u, v, w di $\mathbb{R}^3$ è lo scalare

$$\underbrace{(u \times v)}_{\text{vettore}} \cdot w \in \mathbb{R}$$

prodotto scalare tra vettori

In coordinate, se $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$

$$(u \times v) \cdot w = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$



$$|(u \times v) \cdot w| = \text{Volume del parallelepipedo generato da } u, v, w$$

Lemma

u, v, w sono complanari $\iff$

u, v, w giacciono nello stesso piano $\iff$

$u \times v \cdot w = 0 \iff$

$$\det \begin{pmatrix} - & u & - \\ - & v & - \\ - & w & - \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$rg \begin{pmatrix} - & u & - \\ - & v & - \\ - & w & - \end{pmatrix} < 3 \iff$$

$\dim \langle u, v, w \rangle < 3 \iff$

$\dim \langle u, v, w \rangle \leq 2$

Riassunto

$u \perp v \iff u \cdot v = 0_{\mathbb{R}}$

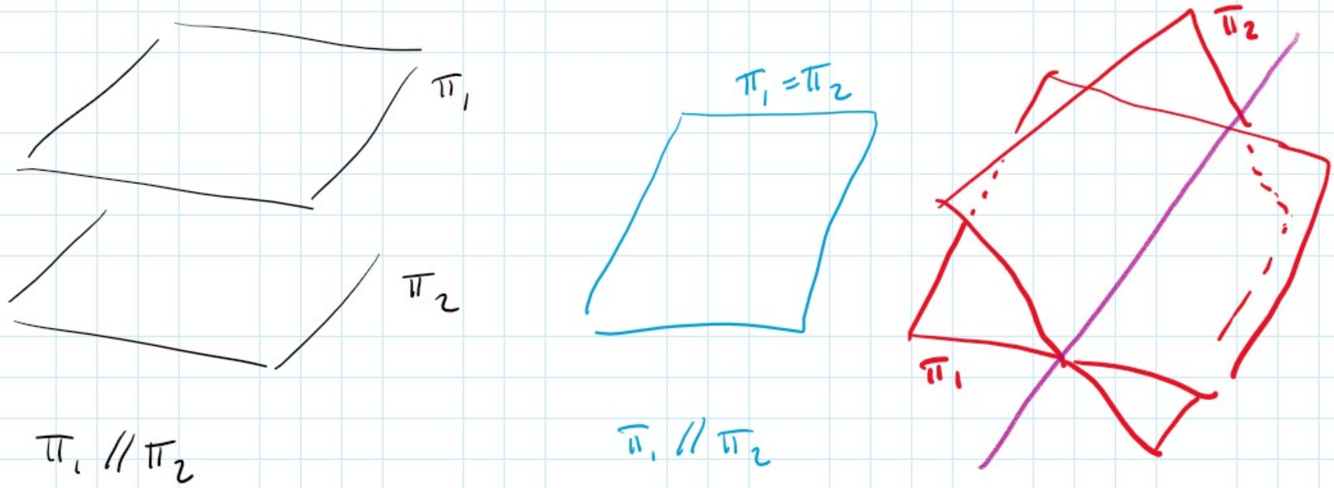
$u \parallel v \iff u \times v = 0_{\mathbb{R}^3}$

u, v, w sono complanari $\iff$

$u \times v \cdot w = 0_{\mathbb{R}}$

$u \times v \cdot w = 0_{\mathbb{R}}$

POSIZIONE RECIPROCA DI 2 PIANI in $\mathbb{A}^3$



$\pi_1 // \pi_2$
senza punti in comune.

$\pi_1 // \pi_2$
$\pi_1 = \pi_2$

$\pi_1 \not\parallel \pi_2$
$\pi_1 \cap \pi_2 = $ retta

Siano $\pi_1 \quad a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \perp \pi_1$

$\pi_2 \quad a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \qquad \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \perp \pi_2$

Qual'è la posizione reciproca di π_1 e π_2?

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \pi_1 \cap \pi_2 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ soddisfa } \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Sol(\Sigma)$$

con $\Sigma : AX = D$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

$$(A|D) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{array}\right)$$

(1) **Se rg(A) = 1** $\Rightarrow$ $(a_1\, b_1\, c_1) \parallel (a_2\, b_2\, c_2)$

Poiché $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \perp \pi_1$ e $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \perp \pi_2$

$\Rightarrow$ $\underline{\pi_1 \parallel \pi_2}$

(1.1) **se rg(A|D) = 2** $\overset{R.C}{\Longrightarrow}$ $\nexists$ soluzioni di Σ

$\Rightarrow$ π_1 e π_2 sono paralleli senza punti in comune.

(1.2) **se rg(A|D) = 1** $\overset{R.C.}{\Longrightarrow}$ $\exists\ \infty$ soluzioni

che dipendono da $\underbrace{3}_{\text{incognite } x,y,z} - 1 = 2$ parametri liberi.

$\Rightarrow$ $\underline{\pi_1 = \pi_2}$

(2) **rg(A) = 2** $\Rightarrow$ rg(A|D) = 2

$\overset{R.C.}{\Longrightarrow}$ $\exists\ \infty$ soluzioni che dipendono da $3 - 2 = 1$ parametri liberi

$\Rightarrow$ $\underline{\pi_1 \cap \pi_2 = \text{retta}}$.