Spazi affini

$V = \mathbb{R}^n$ spazio vettoriale di dim n

$X = \mathbb{R}^n$ insieme di punti

Definiamo un'operazione

$$+ : X \times V \longrightarrow X \qquad \text{somma "punto vettore"}$$

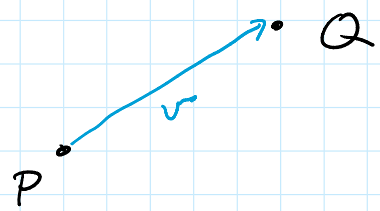
$$(P, v) \longrightarrow P + v$$

data da $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ $\qquad P + v = \begin{pmatrix} x_1 + v_1 \\ \vdots \\ x_n + v_n \end{pmatrix}$

tale che

1. Se $P \in X$ allora $\forall Q \in X \ \exists! \ v \in V$ t.c. $P + v = Q$

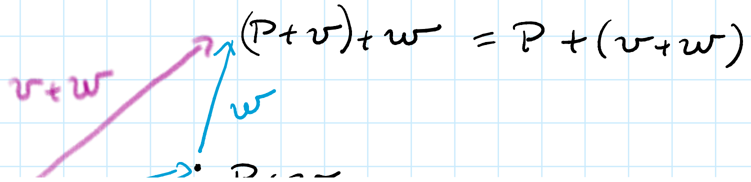
Indichiamo $v = Q - P = \overrightarrow{PQ}$

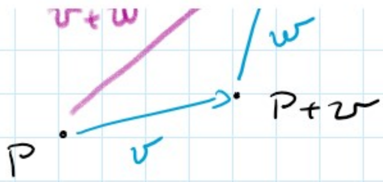


2. Se $P + v = P + w \implies v = w$

Se $P + v = P \implies v = 0_{\mathbb{R}^n}$

3. Se $v, w \in V$ $\qquad (P + v) + w = P + (v + w)$



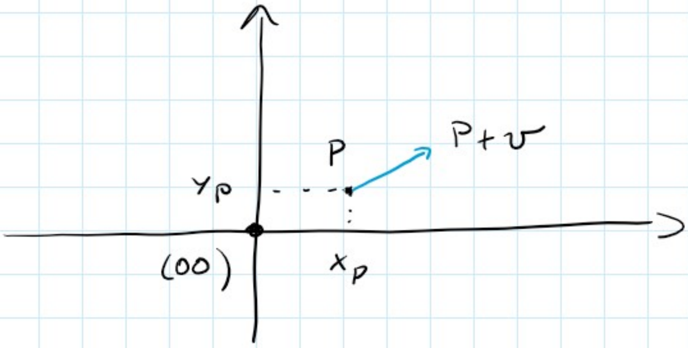


Def Lo spazio affine (standard) n-dimensionale è

$$\mathbb{A}^n(\mathbb{R}) = (V, X, +)$$

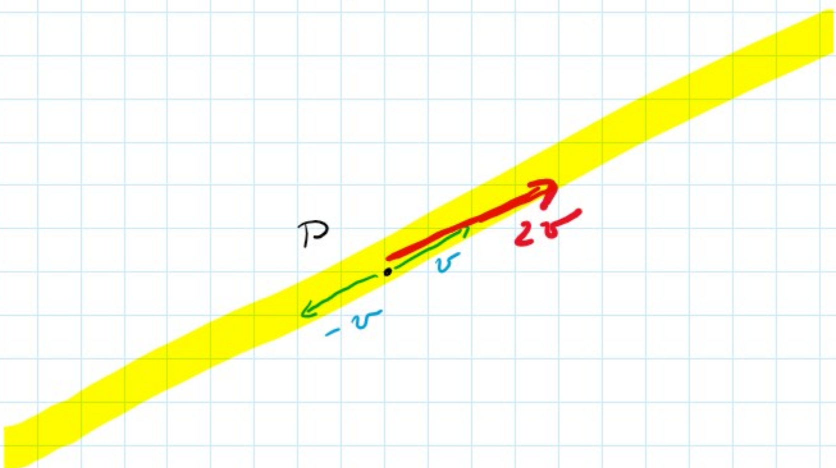
$$V = \mathbb{R}^n, \quad X = \mathbb{R}^n, \quad + : (P, v) \longrightarrow P + v$$

Oggi lavoriamo in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$



Def Una <u>RETTA in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$</u> è

$$r = P + \langle v \rangle$$
$$= \{ P + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$



$\langle v \rangle$ si dice GIACITURA o SPAZIO DIRETTORE di r

Equazioni parametriche della retta r in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$

$$r = P + \langle v \rangle \qquad P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X \in r \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X = P + \lambda v = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + \lambda \alpha \\ y_0 + \lambda \beta \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x = x_0 + \lambda \alpha \\ y = y_0 + \lambda \beta \end{cases}$$

"equazioni parametriche" della retta $r = P + \langle v \rangle$

Equazioni cartesiane della retta r in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$

Si ottengono dall'equazione parametrica eliminando il λ

$$r : \begin{cases} x = x_0 + \lambda \alpha \\ y = y_0 + \lambda \beta \end{cases}$$

Dalla prima equazione otteniamo $\lambda = \frac{x - x_0}{\alpha}$ $(\alpha \neq 0)$

Sostituisco nella seconda equazione

$$y = y_0 + \left(\frac{x - x_0}{\alpha} \right) \beta$$

$$y = y_0 + \frac{\beta}{\alpha} x - \frac{\beta}{\alpha} x_0$$

$$y = \underbrace{\frac{\beta}{\alpha}}\, x + \underbrace{y_0 - \frac{\beta}{\alpha} x_0}$$

Se poniamo $m = \frac{\beta}{\alpha}$ e $q = y_0 - \frac{\beta}{\alpha} x_0$

$$y = \underbrace{m}\, x + \underbrace{q}$$

coefficiente angolare di r (pendenza)

Termine noto

Moltiplichiamo per α

$$\alpha y = \beta x + \alpha y_0 - \beta x_0$$

$$\beta x - \alpha y_0 = -(\alpha y_0 - \beta x_0)$$

Poniamo $a = \beta$, $b = -\alpha$ e $c = -(\alpha y_0 - \beta x_0)$

$$\boxed{a}\, x + \boxed{b}\, y = c$$

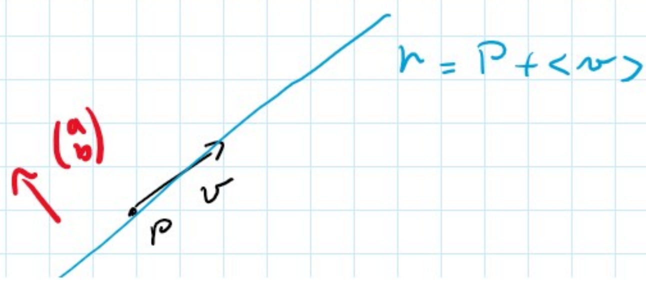
"equazione cartesiana della retta $r = P + \langle \underline{v} \rangle$

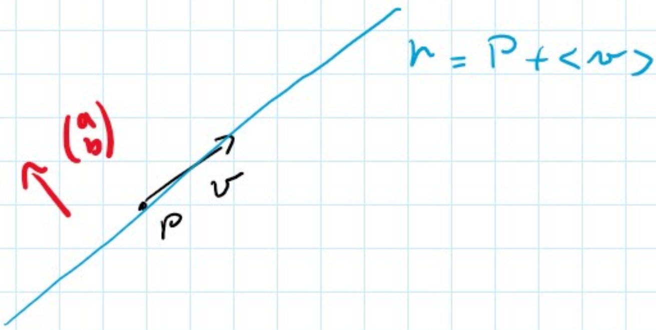
Oss $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ $a = \beta$ $b = -\alpha$

$$\boxed{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \perp v}$$

poiché $\begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = (\beta \ -\alpha) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

$= \beta\alpha - \alpha\beta = 0$



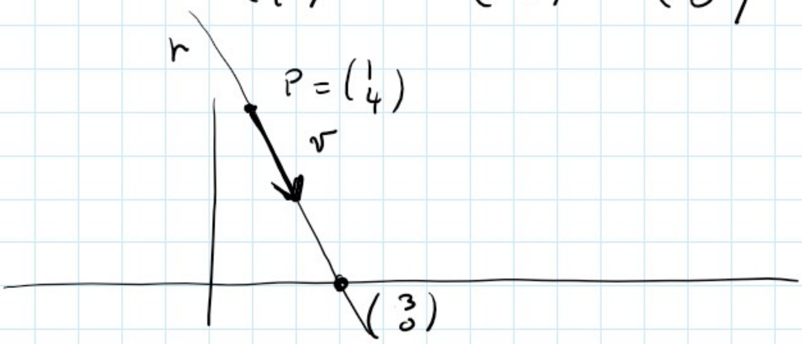


Es $\quad P = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} r &= P + \langle v \rangle \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\lambda = 1 \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in r$

$\lambda = 2 \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \in r$



<u>Equazioni parametriche</u>

$$\begin{aligned} r &= P + \langle v \rangle \\ &= P + \lambda v \qquad \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in r \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \lambda \\ 4 - 2\lambda \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \\ 4-2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1+\lambda & \mathrm{I} \\ y = 4-2\lambda & \mathrm{II} \end{cases}$$

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle \iff \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 4-2\lambda \end{cases}$$

Adesso cerchiamo l'eq. cartesiana

Devo eliminare λ

$\mathrm{I} \Rightarrow \lambda = x-1$

$\mathrm{II} \Rightarrow y = 4-2(x-1)$

$y = 4-2x+2$

$y = 6-2x$

$$2x + 1y = 6 \qquad \text{eq. cartesiana di } r$$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \perp v$ poiché $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = (2\ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$= 2-2 = 0$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ è ortogonale a r (poiché $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ è ortogonale a v e $v \parallel r$)

<u>Oss</u> Si può identificare $r = P + \langle v \rangle$

$$= \begin{pmatrix} x \\ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \end{pmatrix}$$

Oss Si può identificare $r = P + \langle v \rangle$

con $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

alle soluzioni di $\Sigma : \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c$

cioè $r = Sol(\Sigma) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right\rangle$

con $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ = soluzione particolare di Σ $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c$

e $\langle v \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right\rangle$ = soluzioni del sistema lineare omogeneo associato $\Sigma_0 : A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A \in M_{22}(\mathbb{R}) \iff f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\ker A = \langle v \rangle$

$\dim \ker A = \dim \langle v \rangle = 1$

$$\underbrace{\dim \mathbb{R}^2}_{2} = \underbrace{\dim \ker A}_{1} + \underbrace{rg(A)}_{1}$$

$\Rightarrow$ le righe di A sono LD cioè una il multiplo dell'altro

$\Rightarrow$ ho solo 1 equazione $ax + by = c$

e $\langle v \rangle = Sol(\Sigma_0)$ con $\Sigma_0 : ax + by = 0$.

Def Una SOTTOVARIETÀ $\left\{ \begin{matrix} \text{AFFINE} \\ \text{LINEARE} \end{matrix} \right\}$ di $A^2(\mathbb{R})$

Def Una <u>SOTTOVARIETÀ {AFFINE / LINEARE}</u> di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$

è data da

$$L = P + W$$

con P un punto, W sottosp. vett. di $\mathbb{R}^2$

W è detto <u>GIACITURA</u> (o SPAZIO DIRETTORE) di L

La <u>DIMENSIONE</u> di L è la dimensione di W

$$L = P + W = \{ P + v \mid v \in W \}$$

Ho 3 tipi di sottovarietà in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$:

- <u>Se $\dim W = 0$</u> $(\Leftrightarrow W = \{0_{\mathbb{R}^2}\})$

  $$L = P + W = \{ P + 0_{\mathbb{R}^2} = P \} = P$$

  cioè L è un <u>punto</u>

- <u>Se $\dim W = 1$</u> $(\Leftrightarrow W = \langle v \rangle)$

  $$L = P + \langle v \rangle$$

  cioè L è una <u>retta</u>

- <u>Se $\dim W = 2$</u> $(\Leftrightarrow W = \mathbb{R}^2)$

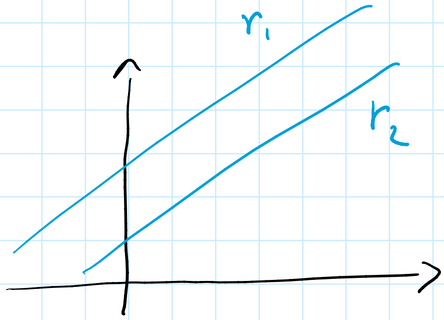
  $$L = P + W = \{ P + v \mid v \in \mathbb{R}^2 \} = \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$$

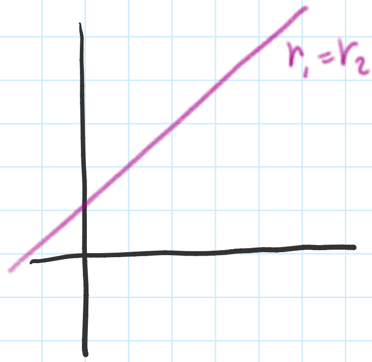
cioè L è il <u>piano affine</u>

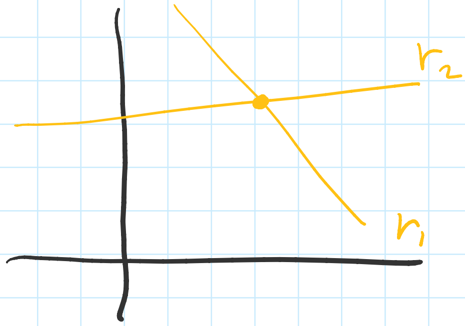
<u>Def</u> Due sottovarietà $L_1 = P_1 + W_1$ e $L_2 = P_2 + W_2$ sono <u>PARALLELE</u> se $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$

<u>Def</u> $\underline{L_1 = L_2} \iff \begin{cases} P_1 \in L_2 \\ W_1 = W_2 \end{cases} \iff \begin{cases} P_2 \in L_1 \\ W_1 = W_2 \end{cases}$

Posizione reciproca di due rette in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$



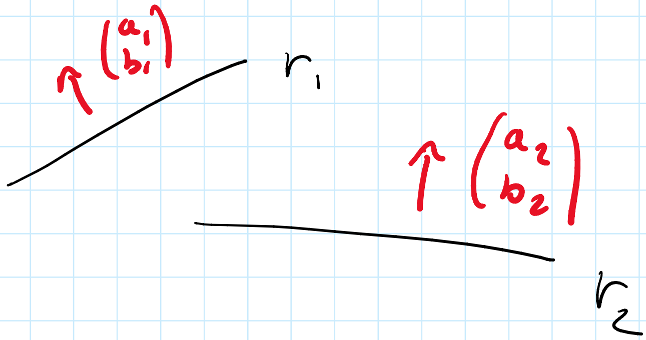




$r_1 // r_2$
senza punti in comune.

$r_1 // r_2$
con ∞ punti in comune
<u>COINCIDENTI</u>

r_1 e r_2 sono INCIDENTI
$(r_1 \not\parallel r_2)$



$r_1 \quad a_1 x + b_1 y = c_1$

$r_2 \quad a_2 x + b_2 y = c_2$

$r_1 \cap r_2 : \begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \end{cases}$

$$r_1 \cap r_2 : \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in r_1 \cap r_2 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in Sol(\Sigma)$$

con $\Sigma : A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C$

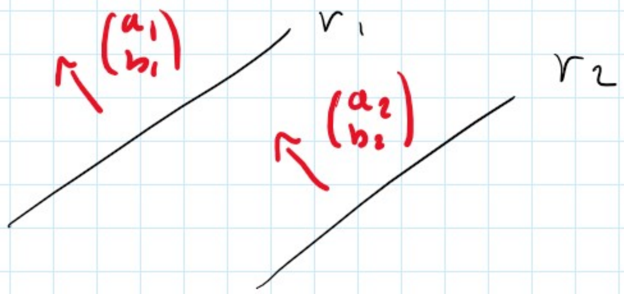
dove $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

$$(A|C) = \left(\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}\right)$$

1 Se rg(A) = 1

$\Rightarrow$ le righe di A, cioè $(a_1\ b_1)$ e $(a_2\ b_2)$ sono multiple una dell'altra

$\Rightarrow$ le due rette r_1 e r_2 hanno la stessa giacitura



$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \iff r_1 \parallel r_2$$

$\Rightarrow r_1 // r_2$

(1.1) $rg(A|C) = 2$ $\overset{\text{Teo R.C}}{\Longrightarrow}$ Σ non ha soluzioni

$\Rightarrow$ $r_1 // r_2$ senza punti in comune

(1.2) $rg(A|C) = 1$ $\overset{\text{Teo R.C.}}{\Longrightarrow}$ Σ ha ∞ soluzioni parametrizzate da $2-1$ parametri liberi

$\Rightarrow$ $r_1 \cap r_2$ è una retta

$\Rightarrow$ $r_1 = r_2$

$\Rightarrow$ r_1 e r_2 sono coincidenti

② **Se $rg(A) = 2$**

$\Rightarrow rg(A|C) = 2$

$\overset{\text{Teo R.C.}}{\Longrightarrow}$ Σ ha un unica soluzione

$\Rightarrow r_1 \cap r_2 = \{P\}$ con P punto

$\Rightarrow r_1$ e r_2 sono incidenti

Es $r_1 : 2x + 3y = 1$

Es $r_1 : \quad 2x + 3y = 1$

$r_2 : \quad 2x + 3y = 7$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad (A|C) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

$rg(A) = 1$, $rg(A|C) = 2$

$\Rightarrow$ r_1 e r_2 parallele senza punti in comune

Es $r_1 : \; 3x - y = 5$

$r_2 : \; 6x - 2y = 10$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \qquad (A|C) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 5 \\ 6 & -2 & 10 \end{array}\right)$$

$rg(A) = 1 \qquad rg(A|C) = 1$

$\Rightarrow$ $r_1 = r_2$, cioè r_1 e r_2 sono coincidenti

Es $r_1 \quad x + y = 7$

$r_2 \quad -x + 8y = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} \qquad (A|C) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ -1 & 8 & 2 \end{array}\right)$$

$rg(A) = 2$, $rg(A|C) = 2$

$\Rightarrow \; r_1 \cap r_2 = \{P\}$ cioè r_1 e r_2 sono incidenti

<u>Spazio affine</u> $\mathbb{A}^3(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, +)$

$$+ : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(P, v) \longrightarrow P+v = \text{punto}.$$

<u>Def</u> Una <u>sottovarietà</u> di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ è l'insieme

$$L = P + W$$

con P punto di $\mathbb{R}^3$

e W sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$

$$L = P + W = \{P + w \mid w \in W\}$$

W è detto <u>GIACITURA</u> (o <u>SPAZIO DIRETTORE</u>) di L

La dimensione di L è la dimensione di W

$$\dim L = \dim W$$

Ho 4 tipi di <u>sottovarietà di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$</u>, $L = P + W$

- <u>$\dim W = 0$</u> $\;(\Leftrightarrow W = \{0_{\mathbb{R}^3}\})$

$$L = P + W = \{P + 0_{\mathbb{R}^3} = P\} = P \qquad \underline{\text{PUNTO}}$$

- $\underline{\dim W = 1}$ $\quad (\iff W = \langle v \rangle)$

$$L = P + W = \{P + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$ RETTA

- $\underline{\dim W = 2}$ $\quad (\iff W = \langle v, w \rangle, \ v, w \text{ LI})$

$$L = P + W = \{P + \lambda v + \mu w \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

PIANO

- $\underline{\dim W = 3}$ $\quad (\iff W = \mathbb{R}^3)$

$L = \underline{\mathbb{A}^3(\mathbb{R}) = \text{spazio affine}}$.