martedì 14 novembre 2023 10:55

Es:
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$
è simmetrica e a coeff. reali

① Trovare una matrice NON ortogonale che diagonalizza A

② Trovare una matrice ortogonale che diagonalizza A

A simmetrica $\Rightarrow$ ortogonalmente diagonalizzabile

Cerchiamo gli autovalori di A

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_d) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -2 \\ -1 & 3-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix}$$

1° riga − 2° riga
$$= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -4+\lambda & 0 \\ -1 & 3-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix}$$

2° colonna + 1° colonna
$$= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -2 \\ -2 & -4 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)\left[(2-\lambda)(-\lambda) - 8\right]$$

$= (4-\lambda)\ [-2\lambda + \lambda^2 - 8]$

$= (4-\lambda)\ (\lambda - 4)\ (\lambda + 2)$

Gli autovalori sono $4, 4, -2$

$ma(4) = 2$

$ma(-2) = 1$

Per il Teorema spettrale so che A è diagonalizzabile

$\Rightarrow \quad 2 = ma(4) = mg(4)$

$\quad\quad 1 = ma(-2) = mg(-2)$

$$V_4 = Ker(A - 4\,Id) = Ker\begin{pmatrix} 3-4 & -1 & -2 \\ -1 & 3-4 & -2 \\ -2 & -2 & 0-4 \end{pmatrix}$$

$$= Ker\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \qquad rg(A - 4\,Id) = 1$$

$$\dim \mathbb{R}^3 = 3 = \underbrace{\dim Ker(A - 4\,Id)}_{\dim V_4 = 2} + \underbrace{rg(A - 4\,Id)}_{1}$$

$$V_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle|\ -x - y - 2z = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -y-2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Poiché so che $mg(4) = 2 = \dim V_4$

$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ formano base di V_4

$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$V_{-2} = \operatorname{Ker}(A - (-2)\, Id) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 3+2 & -1 & -2 \\ -1 & 3+2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\dim V_{-2}}{\overset{\parallel}{mg(-2)}} = ma(-2) = 1$$

Poiché A è simmetrica so che $V_4 \perp V_{-2}$

$\mathbb{R}^3 = V_4 \oplus V_{-2} \qquad V_4 \perp V_{-2}$

$\mathbb{R}^3 = V_4 \oplus V_4^\perp$

Per l'unicità del complemento ortogonale $V_4^\perp = V_{-2}$

$$V_{-2} = V_4^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot v_1 = 0 \text{ e } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot v_2 = 0 \right\}$$

poiché $\{v_1, v_2\}$ base di V_4

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{(x\ y\ z) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{-x+y} = 0 \iff -x + y = 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{(x\ y\ z) \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{-2x+z} = 0 \iff -2x+z=0$$

$$V_{-2} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = y \text{ e } z = 2x \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ 2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$B = \{v_1, v_2, v_3\}$ è base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori

$$\text{Sia } M = M^{\mathcal{E}}_{B}(Id) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \end{array}$$

$\mathcal{E}$ base canonica

$$M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

M ortogonale $\iff$ B è ON

$\iff$ nelle colonne ho le coordinate di una base ON

$V_4 = \langle v_1, v_2 \rangle$ $\qquad$ $V_{-2} = V_4^{\perp} = \langle v_3 \rangle$

$$v_1 \cdot v_2 = (-1\ 1\ 0)\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} = 2 \neq 0$$ v_1 non è ortogonale a v_2

$\Rightarrow$ B non è ON $\Leftrightarrow$ M non è ortogonale

Applichiamo Gram Schmidt alla base $\{v_1, v_2\}$ di V_4

$$v_1' = \frac{1}{\|v_1\|} v_1 \qquad \|v_1\| = \left\|\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{(-1\ 1\ 0)\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}} = \sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$v_2' = \frac{v_2 - (v_2 \cdot v_1')\, v_1'}{\| v_2 - (v_2 \cdot v_1')\ v_1'}$$

$$v_2 - (v_2 \cdot v_1')\ v_1' = \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\frac{(-2)(-1)+0\cdot 1+1\cdot 0}{2}$$

$$= \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\ 2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\left\|\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{(-1\ -1\ 1)\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$v_2' = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Base ON di V_4 è $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Base di V_{-2} è $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\|v_3\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(1\,1\,2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}} = \sqrt{1+1+4}$$
$$= \sqrt{6}$$

$\Rightarrow$ Base ON di V_{-2} è $\left\{ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=v_3'} \right\}$

Poiché $V_4 \perp V_{-2}$, $\mathcal{B}' = \{ v_1', v_2', v_3' \}$ è base ON di $\mathbb{R}^3$

formata di autovettori

$$M' = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}'}(Id) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \;\; v_1' & \quad\; v_2' & \quad\; v_3' \end{matrix} \end{array}$$

è ortogonale poiché nelle sue colonne ho le coordinate di vettori di una base ON

$$(M')^t A M' = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(M')^{-1} A M' \overset{!}{=}$$

Es $A_K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix} \in M_{33}(\mathbb{R})$ se $K \in \mathbb{R}$

① Per quali valori di $K \in \mathbb{R}$, $\exists$ base ON di autovettori?

Per il teorema spettrale

A_K simmetrica $\Leftrightarrow$ $\exists$ base ON di autovettori

$\Leftrightarrow$ A_K è ortogonalmente diagonalizzabile

$\Leftrightarrow$ $\forall K \in \mathbb{R}$

② Determinare una matrice ortogonale M tale che $M^{-1} A M$ sia diagonale.

Calcoliamo gli autovalori:

$$\det(A_K - x\,Id) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 2 & 0 \\ 2 & 4-x & 0 \\ 0 & 0 & K-x \end{pmatrix}$$

$$= (K-x) \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & 4-x \end{vmatrix}$$

$$= (K-x)\left[(1-x)(4-x) - 4\right]$$

$= (k-x)\left[(1-x)(4-x)-4\right]$

$= (k-x)\left[\cancel{4}-x-4x+x^2\cancel{-4}\right]$

$= (k-x)\, x\, (x-5)$

Gli autovalori sono $k, 0, 5$

$\boxed{\text{CASO 1} \quad k \neq 0,\ k \neq 5}$

$$\mathbb{R}^3 = \underbrace{V_k}_{\dim 1} \oplus \underbrace{V_0}_{\dim 1} \oplus \underbrace{V_5}_{\dim 1}$$

$$V_0 = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x+2y=0 \\ kz=0 \end{array} \right\}$$

$$\begin{cases} z=0 \\ x=-2y \end{cases} \qquad = \left\{ \begin{pmatrix} -2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-2\,1\,0)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

Base ON di V_0 è $\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$V_5 = \ker \begin{pmatrix} 1-5 & 2 & 0 \\ 2 & 4-5 & 0 \\ 0 & 0 & k-5 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & k-5 \end{pmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} 2x-y=0 \\ (k-5)z=0 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Una base ON di V_5 è $\frac{1}{\left\|\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right\|}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

$$\left\|\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{(1\,2\,0)\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$V_k = \mathrm{Ker}(A - kId) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix}1-k & 2 & 0\\ 2 & 4-k & 0\\ 0 & 0 & k-k\end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix}1-k & 2 & 0\\ 2 & 4-k & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

Una base ON di V_K è $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Per $K \neq 0$ e $K \neq 5$ $\qquad M = \begin{pmatrix}-2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0\\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad V_0 \qquad V_5 \qquad V_k$

$$M^t A_k M = \begin{pmatrix}0 & & \\ & 5 & \\ & & k\end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{CASO 2} \quad K = 0}$ $\qquad A_0 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

Gli autovalori sono $0, 0, 5$

$$\mathbb{R}^3 = \underbrace{V_0}_{\text{dim } 2} \oplus \underbrace{V_5}_{\text{dim } 1} \quad \text{e} \quad V_0 \perp V_5$$

$$V_5 = Ker(A_0 - 5\,Id) = Ker\begin{pmatrix} 1-5 & 2 & 0 \\ 2 & 4-5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = Ker\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} -4x + 2y = 0 \\ 2x - y = 0 \\ -5z = 0 \end{matrix} \right\}$$

$z = 0$ e $y = 2x$

$$V_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{5}$$

Una base ON di V_5 è $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$V_0 = Ker(A_0 - 0\,Id) = Ker(A_0) = Ker\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; x + 2y = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -2y \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \left\{ y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Applichiamo Gram schmidt alla base $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Osserviamo che $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-2\;1\;0)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$$= -2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

Devo solo rendere $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dei versori

$$\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-2\ 1\ 0) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \qquad \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = 1$$

Una base ON di V_0 è $\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

La matrice $M = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ è ortogonale poiché nelle sue colonne ho le coordinate di vettori che formano una base ON.

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{\quad\quad\quad}_{V_0} & & \underbrace{\quad}_{V_5} \end{array}$$

$$M^t A_0 M = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$$

Caso 3 $\quad K = 5$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori sono $5, 5, 0$

$$\mathbb{R}^3 = \underbrace{V_5}_{\dim 2} \oplus \underbrace{V_0}_{\dim 1}$$

$$\underset{\dim V_5}{\underset{=}{mg(5)}} = ma(5) = 2$$

$$\underbrace{mg(0)}_{\dim V_0} = ma(0) = 1$$

$$V_0 = \mathrm{Ker}(A_S) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x+2y=0 \\ 5z=0 \end{array} \right\}$$

$z=0$ e $x=-2y$

$$V_0 = \left\{ \begin{pmatrix} -2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-2\,1\,0) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

Una base ON di V_0 è $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$V_5 = \mathrm{Ker}(A_S - 5\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 1-5 & 2 & 0 \\ 2 & 4-5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \; 2x-y=0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Poiché $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$, per ottenere una base ON di V_5 devo solo normalizzare i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = 1 \qquad \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(1\,2\,0) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

Una base ON di V_5 è $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$ è ortogonale

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ è ortogonale

$\underbrace{\qquad\qquad}_{V_5}$ $\underbrace{\qquad}_{V_0}$

poiché nelle colonne di H ho le coordinate di vettori che formano una base ON

$$H^t A_S H = \begin{pmatrix} 5 & & \\ & 5 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$