16:30 – 18:30 OD Vallisneri

Teorema spettrale

Sia $A \in M_{n\,n}(\mathbb{R})$

A è ortogonalmente diagonalizzabile $\Longleftrightarrow$ A è simmetrica

Prop A è ortogonalmente diagonalizzabile $\Longrightarrow$ A è simmetrica.

Per dimostrare che "A simmetrica $\Longrightarrow$ A ortogonalmente diagonalizzabile" dividiamo la dimostrazione in 3 lemmi.

A diagonalizzabile $\Longleftrightarrow$ $\exists$ una base di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori

$\Longleftrightarrow$ $\mathbb{R}^n = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}$

con $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ autovalori distinti

$\Longleftrightarrow$ $\exists$ P matrice invertibile

$\iff \exists\, P$ matrice invertibile

tale che $P^{-1}AP = D =$ matrice diagonale

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | & | & | \end{pmatrix}$$

autovettori che formano base di $\mathbb{R}^n$

A ortogonalmente diagonalizzabile $\iff \exists$ base ON di autovettori

$\iff \mathbb{R}^n = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$ con $V_{\lambda_i} \perp V_{\lambda_j}$

$\iff \exists\, P$ ortogonale tale che

$$P^t A P = D = \text{matrice diagonale}$$

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | & | & | \end{pmatrix}$$

base ON di autovettori $\Rightarrow P$ è ortogonale

Proposizione 1

Sia $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$

A simmetrica $\Rightarrow$ tutte le radici del polinomio caratteristico di A, $p_A(x) = \det(A - x\,Id)$, sono reali ($\iff A$ ha tutti autovalori reali) dim: $p_A(x) = \det(A - x\,Id) \in \mathbb{R}[x]$ di grado n

poiché A è matrice $n \times n$

Per il teorema fondamentale dell'algebra $p_A(x)$ ha n radici complesse contate con la loro molteplicità

$$p_A(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - \lambda_i) \stackrel{\text{def}}{=} (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_n)$$

con $\lambda_i \in \mathbb{C}$

Questi λ_i sono gli autovalori di A

Devo dimostrare che se A è simmetrica tutti i λ_i sono reali, cioè $\lambda_i \in \mathbb{R}$

Se $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$, $\bar{\lambda} = a - ib$ è il coniugato di λ

$\lambda \in \mathbb{R} \iff \lambda = \bar{\lambda} \iff b = 0$

Se $M = (a_{ij})$ allora $\bar{M} = (\bar{a}_{ij})$

Sia λ un autovalore di $A \Rightarrow \exists\, v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ t.c.

$\boxed{Av = \lambda v}$

$$\overline{Av} = \overline{\lambda v} = \bar{\lambda}\,\bar{v}$$

$=$

$$\bar{A}\,\bar{v} = A\,\bar{v}$$

poiché $A \in M_{nn}(\underline{\mathbb{R}})$

Dunque $\overline{v}$ è autovettore di A di autovalore $\overline{\lambda}$

$$\boxed{Av = \lambda v} \Rightarrow (Av)^t = (\lambda v)^t = \lambda v^t$$

$$= v^t A^t = v^t A$$

poiché A è simmetrica cioè $A = A^t$

$$v^t A = \lambda v^t$$

$$v^t \underline{A \overline{v}} = \lambda v^t \overline{v}$$

$$v^t \overline{\lambda} \overline{v} = \lambda v^t \overline{v}$$

$$\overline{\lambda} v^t \overline{v} = \lambda v^t \overline{v}$$

$$(\overline{\lambda} - \lambda)\underbrace{(v^t \overline{v})}_{\neq 0} = 0$$

Ma $v^t v > 0$ poiché se $v = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_m \end{pmatrix}$

$$v^t \overline{v} = (z_1 \dots z_m)\begin{pmatrix} \overline{z}_1 \\ \vdots \\ \overline{z}_m \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} z_i \overline{z}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} |z_i|^2 > 0$$

$\Rightarrow \overline{\lambda} - \lambda = 0$ cioè $\overline{\lambda} = \lambda \iff \lambda \in \mathbb{R}$

Proposizione 2

Sia $A \in M_{mm}(\mathbb{R})$ simmetrica

Se α e β sono autovalori <u>distinti</u>, allora $V_\alpha \perp V_\beta$

cioè $\forall v_1 \in V_\alpha$ e $\forall v_2 \in V_\beta$ $v_1 \perp v_2$

se α e β sono autovalori distinti, allora $V_\alpha \perp V_\beta$

cioè $\forall v_\alpha \in V_\alpha$ e $\forall v_\beta \in V_\beta$ $\quad v_\alpha \perp v_\beta$

cioè $\forall v_\alpha \in V_\alpha$ e $\forall v_\beta \in V_\beta$ $\quad v_\alpha \cdot v_\beta = 0_{\mathbb{R}}$

dim. Partiamo da $\boxed{v_\alpha^t A v_\beta}$

$$v_\alpha^t A v_\beta = v_\alpha^t (A v_\beta) = v_\alpha^t \beta v_\beta = \beta v_\alpha^t v_\beta$$

$$= (v_\alpha^t A) v_\beta = (v_\alpha^t A^t) v_\beta = (A v_\alpha)^t v_\beta$$

A simmetrica $\Leftrightarrow$ $A = A^t$

$$= (\alpha v_\alpha)^t v_\beta$$

$$= \alpha v_\alpha^t v_\beta$$

$$\Rightarrow \beta v_\alpha^t v_\beta = \alpha v_\alpha^t v_\beta$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\beta - \alpha)}_{\neq 0} v_\alpha^t v_\beta = 0_{\mathbb{R}}$$

α e β sono autovalori distinti, cioè $\alpha \neq \beta \Leftrightarrow \beta - \alpha \neq 0$

$$\Rightarrow v_\alpha^t v_\beta = 0_{\mathbb{R}}$$

$$\Leftrightarrow v_\alpha \cdot v_\beta = 0_{\mathbb{R}}$$

$$\Leftrightarrow v_\alpha \perp v_\beta$$

Proposizione 3

Proposizione 3

Sia $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ simmetrica

Se $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sono autovalori distinti di A, allora

$$\mathbb{R}^n = V_{\alpha_1} \oplus V_{\alpha_2} \oplus \dots \oplus V_{\alpha_k}$$

cioè A è diagonalizzabile.

dim Sia $W = V_{\alpha_1} \oplus V_{\alpha_2} \oplus \dots \oplus V_{\alpha_k}$

Devo dimostrare che $\mathbb{R}^n = W$

Poiché $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$, devo dimostrare che $W^\perp = \{\vec{0}_{\mathbb{R}^n}\}$

Sia B_i una base ON di V_{α_i} per $i = 1, \dots, k$

(lo posso fare per Gram Schmidt)

Per la proposizione 2, $V_{\alpha_i} \perp V_{\alpha_j}$ e dunque

$B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$ è base ON di W

poiché $W = V_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus V_{\alpha_k}$

poiché B_i sono ON e $V_{\alpha_i} \perp V_{\alpha_j}$

Supponiamo per assurdo che $W^\perp \neq \{\vec{0}_{\mathbb{R}^n}\}$, cioè $\dim W^\perp \geq 1$

Sia $B_{W^\perp}$ una base ON di $W^\perp$

Poiché $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$

$B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k \cup B_{W^\perp}$ è base ON di $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$

poiché

$W^\perp = \{ z \in \mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$

$W^\perp = \{ z \in \mathbb{R}^n \mid z \perp w \ \forall w \in W \}$

$\underset{=}{A} \in M_{nn}(\mathbb{R}) \iff f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ con $\mathcal{E}$ base canonica $\qquad x \longmapsto f(x) = Ax$

Verifichiamo che $\underline{f(W^\perp) \subseteq W^\perp}$

Sia $\underline{w^\perp \in W^\perp}$ $\qquad Aw^\perp = f(w^\perp)$

$\forall w \in \underset{=}{W}$ $\qquad w \overset{(*)}{=} v_1 + \_\_ + v_h$ $\quad$ con $v_i \in V_{\alpha_i}$

$V_{\alpha_1} \oplus \_ \oplus V_{\alpha_h}$

$$
\begin{aligned}
w \cdot f(w^\perp) &= w \cdot Aw^\perp \\
&= w^t A w^\perp \\
&= w^t A^t w^\perp \\
&= (Aw)^t w^\perp \\
&\overset{(*)}{=} (A(v_1 + \_\_ + v_h))^t w^\perp \\
&= (Av_1 + Av_2 + \_ + Av_h)^t w^\perp \\
&= (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \_\_ + \alpha_h v_h)^t w^\perp \\
&= \underbrace{(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \_\_ + \alpha_h v_h)}_{W = V_{\alpha_1} \oplus \_ \oplus V_{\alpha_h}} \cdot \underbrace{w^\perp}_{W^\perp} = 0
\end{aligned}
$$

A simmetrica cioè $A^t = A$

$v_i \in V_{\alpha_i}$

$\forall w \quad w \cdot f(w^\perp) = 0 \longrightarrow f(w^\perp) \in W^\perp$

$\forall w \quad w \cdot f(w^\perp) = 0 \implies f(w^\perp) \in W^\perp$

$\implies f(W^\perp) \subseteq W^\perp$

Sia $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_h \cup \mathcal{B}_{W^\perp}$ base ON di $\mathbb{R}^n$

Sappiamo che $f(W^\perp) \subseteq W^\perp$

$$\tilde{A} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \alpha_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \alpha_1 & & & & & \\ & & & \alpha_2 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \alpha_2 & & \\ & & & & & & \alpha_h & \\ & & & & & & & \ddots \; \alpha_h \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & M \end{array}\right)$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{W} \; \underbrace{\qquad}_{W^\perp}$$

poiché $f(W^\perp) \subseteq W^\perp$

base $\mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_h$ di W formata da autovettori di f

$A = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$ e $\tilde{A} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ rappresentano f rispetto a basi diverse, cioè A e $\tilde{A}$ sono simili

$\implies \exists\, M$ matrice di cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{E}$ t.c. $\tilde{A} = M^{-1} A M$

$\mathcal{B}$ è base ON di $\mathbb{R}^n \implies M$ è ortogonale, cioè $M^{-1} = M^t$

$\implies \tilde{A} = M^t A M = M^{-1} A M$

Verifichiamo che $\tilde{A}$ è simmetrica

$$\tilde{A}^t = (M^t A M)^t = M^t A^t M^{tt} = M^t A M = \tilde{A}$$

A simmetrica cioè $A = A^t$

Poiché $\tilde{A}$ è simmetrica anche M è simmetrica

Per la proposizione 1, M ha autovalori reali

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ autovalore di M.

Dunque $\alpha \in \mathbb{R}$ è autovalore di $\tilde{A}$

Poiché A e $\tilde{A}$ sono simili, hanno gli stessi autovalori

e dunque $\alpha \in \mathbb{R}$ è autovalore di A $\lightning$

Ma tutti gli autovalori reali di A sono gli $\alpha_1, \dots, \alpha_k$

L'assurdo nasce dall'aver supposto $W^\perp \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Proposizione

$A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ simmetrica $\Rightarrow$ A ortogonalmente diagonalizzabile.

proposizione 1 $\Rightarrow$ A ha tutti autovalori reali

proposizione 2 $\Rightarrow$ $V_\alpha \perp V_\beta \quad \forall \alpha \neq \beta$, α, β autovalore

proposizione 3 $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^n = V_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus V_{\alpha_k}$ cioè

A è diagonalizzabile

Sia B_i base ON di V_{α_i} (applico Gram Schmidt a una qualsiasi base di V_{α_i})

Per la prop 2 ho che $\underline{V_{\alpha_i} \perp V_{\alpha_j}}$ e dunque

$$B = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k$$

è base ON di $V_{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus V_{\alpha_k}$

Per la prop 3, $\mathbb{R}^n = V_{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus V_{\alpha_k}$

cioè B è base ON di $\mathbb{R}^n$

$\Longrightarrow$ B è base ON formata da autovettori di A

$\Longrightarrow$ A è ortogonalmente diagonalizzabile

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_k \end{pmatrix} = H^t A H$$

con $H = \begin{pmatrix} \vert & \vert & \vert & \vert & \vert & \vert \end{pmatrix}$

autovettori che formano base B

Ma B è ON $\Longrightarrow$ H è ortogonale.