FALG_AA2021_appello4

Friday, 3 September 2021 12:54

Es 1

$$U_1 = \left\langle \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}2\\1\\-1\\2\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}0\\3\\-1\\-2\end{pmatrix} \end{array} \right\rangle$$

$$U_2 = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \; x_1 + 3x_2 = 0 \; e \; 7x_1 - x_2 = 0 \right\}$$

a) Determinare una base e la dimensione di U_1 e U_2

Calcolo il rango della matrice che ha come righe i generatori di U_1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}=\text{III}-2\text{I}]{\text{II}=\text{II}-\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}:\text{IV}+\text{II}]{\text{III}:\text{III}-\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

U_1 ha dimensione 1 e una sua base è $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-3\\1\\2\end{pmatrix} \right\}$

Trovo le soluzioni di

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0 \\ 7x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$(x_3, x_4$ qualsiasi$)$

quindi U_2 ha dimensione 2 ed una sua base è ad esempio

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

b) Determinare una base e le equazioni del complemento ortogonale di U_1 $(U_1^\perp)$

$$U_1^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ t.c. } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \text{ e } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_3 \\ x_4 = \frac{3}{2}x_2 - \frac{x_3}{2} \end{cases}$$

$x_1 = -2\alpha + \beta$

$x_2 = \alpha$

$x_3 = \beta$

$x_4 = \frac{3}{2}\alpha - \frac{\beta}{2}$

Da cui $U_1^{\perp} = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\rangle = \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}_{\text{Base di } U_1^{\perp}}$

$$U_1^{\perp} : \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ t.c. } x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \text{ e } -3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \right\}$$

c) Dati $w_1 = (2, -1, 3)$, $w_2 = (3, -3, 2)$, $w_3 = (5, -4, t)$
si dica se può esistere una funzione $g: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ t.c.

$g(u_1) = w_1$, $g(u_2) = w_2$, $g(u_3) = w_3$

Dal punto 1 sappiamo che $u_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}, u_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}, u_3=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\2\end{pmatrix}$ sono L.D. e nello specifico

$$u_3 = u_1+u_2$$

affinché tale funzione lineare esista $\Rightarrow$ $g(u_3) = g(u_1)+g(u_2)$

e quindi $w_3 = w_1 + w_2$

$$\begin{pmatrix}5\\-4\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix}$$

Quindi
$5 = 2+3$ ✓
$-4 = -1-3$ ✓
$t = 3+2=5$

$g: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ che rispetti le condizioni date esiste per $\boxed{t=5}$

d) Discutere se tale funzione, in caso esista, è unica

La funzione trovata NON è unica dato che esistono infinite combinazioni di vettori di $\mathbb{R}^4$ che rispettano le relazioni richieste infatti non sono note le immagini dei vettori di una base di $\mathbb{R}^4$.

Es 2

Sia $A=\begin{pmatrix}4&0&0\\7&-3&-1\\3&-3&-1\end{pmatrix}$

a) Determinare il polinomio caratteristico di A, i suoi autovalori. La matrice A è diagonalizzabile. Motivare la risposta e, in caso, trovare la forma diagonale di A

$$p_A(x) = \det\begin{pmatrix}4-x&0&0\\7&-3-x&-1\\3&-3&-1-x\end{pmatrix} = (4-x)(-3-x)(-1-x) - 3(4-x)$$

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ 7 & -3-x & -1 \\ 3 & -3 & -1-x \end{pmatrix} = (4-x)(\cdots) \cdots$$

$$= (4-x)\left(\cancel{3} + x + 3x + x^2 - \cancel{3}\right)$$

$$= (4-x)\, x\, (4+x) = 0$$

Da cui $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 4$ essendo una matrice 3×3 con 3 autovalori distinti, questi avranno necessariamente molteplicità algebrica e geometrica pari a 1 e la matrice sarà diagonalizzabile

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$ matrice diagonale simile ad A

b) Trovare gli autospazi relativi agli autovalori di A

V_0: $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \boxed{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle} = \operatorname{Ker} A$

$$\begin{cases} 4x_1 = 0 \\ 7x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = -3x_2 \end{cases} \Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

V_4: $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } (A - 4I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \boxed{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 7 & -7 & -1 \\ 3 & -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 7x_1 - 7x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$3x_1 - 3x_2 - 35x_2 + 35x_1 = 0$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = \dfrac{x_3}{7} \\ x_1 - x_2 = \dfrac{5}{3} x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 = x_2 \end{cases}$$

$$V_{-4} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } (A+4\mathbb{I})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \boxed{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{matrix} \quad \Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

c)

Trovare le matrici H, K t.c. $KAH = \Delta$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 7 & -3 & -1 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

H ha come colonne gli autovettori di A secondo la base canonica

$$\boxed{H = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{array}\right)}$$

$$K = H^{-1} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/4 & +1/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 & 3/4 & 1/4 \end{array}\right)$$

$$\boxed{K = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3/4 & 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}}$$

d) Determinare le soluzioni del sistema $Ax = b$ con $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\Sigma : \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 7 & -3 & -1 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 7 & -3 & -1 & 10 \\ 3 & -3 & -1 & 6 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x_1 = 1 \\ -3x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

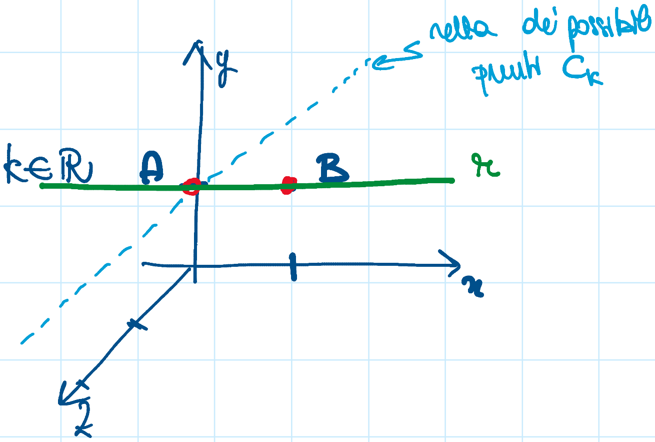
$$\text{rk } A = \text{rk}(A|b) < 3 \qquad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = -3 - 3\alpha \end{cases}$$

il sistema ha ∞ soluzioni in funzione di 1 parametro

$$\boxed{\text{Sol}\,\Sigma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle}_{\ker A \text{ trovato prima}}}$$

ES 3

$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ k \end{pmatrix} \quad k \in \mathbb{R}$



a) Eq. cartesiane della retta passante per A e B

$r: A + \langle B-A \rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle$ eq. vettoriali $\begin{cases} x = \alpha \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ eq. parametriche

$\boxed{\begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases}}$ Eq. cartesiane di r

Fascio di piani di sostegno r $\boxed{\phi_r = \alpha(y-1) + \beta z = 0}$

b) Al variare di k eq. del piano che passa per A,B,C

se $k=0$ $A \equiv C$ e i 3 punti sono allineati (sulla retta r)

$\Rightarrow$ in questo caso ogni piano che contiene r passa per ABC

$\Rightarrow$ Quindi il fascio ϕ_r del punto precedente rappresenta tutti i piani per A,B,C.

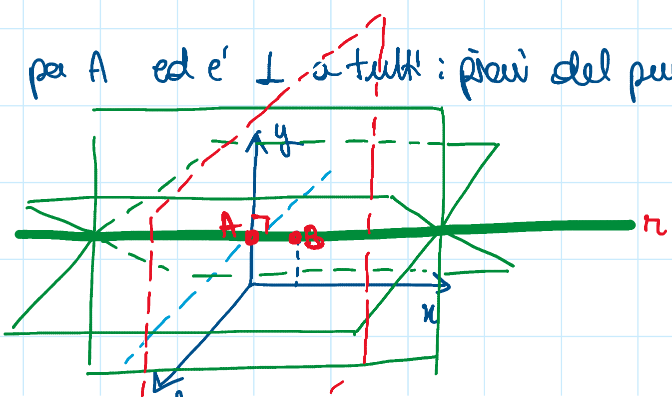
se $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\exists$ 3 pti non sono allineati e passa solo un piano per A,B,C

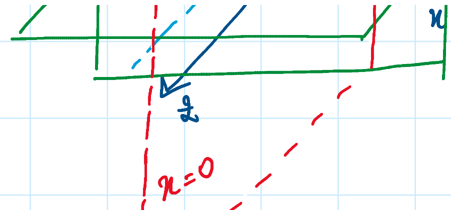
$\Rightarrow$ La seconda coordinata di ogni punto è 1

quindi l'equazione del piano $\boxed{\pi : \ y = 1}$

c) Determinare il piano che passa per A ed è $\perp$ a tutti i piani del punto precedente passanti per A,B,C.

$\boxed{\sigma : \ x = 0}$





d) Determinare per quali valori di k, A,B,C sono vertici di un triangolo rettangolo

$$\overline{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overline{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -k \end{pmatrix} \qquad \overline{CA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{BC} = 0 \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -k \end{pmatrix} = -1 \neq 0$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{CA} = 0 \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} = 0 \quad \text{sempre } \forall k$$

$$\overline{BC} \cdot \overline{CA} = 0 \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -k \end{pmatrix} = -k^2 = 0 \quad \text{se } k=0$$

↓
No in questo caso i pti sono allineati

Escludendo il caso $k=0$ (triangolo degenere),
l'angolo A del triangolo $\overset{\triangle}{ABC}$ sarà sempre rettangolo mentre
gli angoli B e C non lo saranno mai.