

LT in Ingegneria dell'energia



Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria
IV appello AA 2020/2021

Docenti: A.Larese, G. Peruginelli

8 settembre 2021

Esercizio 1

Nello spazio vettoriale \mathbb{R}^4 si considerino i sottospazi

$U_1 = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$ dove

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

e U_2 definito dalle equazioni $x_1 + 3x_2 = 0$ e $7x_1 - x_2 = 0$.

- (a) Determinare una base e le dimensioni di U_1 e U_2 ;
- (b) Determinare la base e la dimensione di U_1^\perp .
- (c) Dati $w_1 = (2, -1, 3)$, $w_2 = (3, -3, 2)$ e $w_3 = (5, -4, t)$, si dica per che valori di $t \in \mathbb{R}$ può esistere una funzione lineare $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $g(u_1) = w_1$, $g(u_2) = w_2$ e $g(u_3) = w_3$.
- (d) Per tali valori di t dire se g è unica e giustificare la risposta.

Esercizio 2

Si consideri la matrice $A \in \mathbb{M}_{3,3}(\mathbb{R})$,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 7 & -3 & -1 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare il polinomio caratteristico di A e i suoi autovalori. Dire se A è diagonalizzabile e determinarne eventualmente la sua forma diagonale Δ ;
- (b) Determinare gli autospazi relativi ad ogni autovalore di A ;
- (c) Determinare le matrici H e K tali che $\Delta = K \cdot A \cdot H$
- (d) Determinare le soluzioni del sistema $Ax = b$ con $b = (4, 10, 6)$.

Esercizio 3

Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, i punti $A = (0, 1, 0)$ $B = (1, 1, 0)$, $C_k = (0, 1, k)$.

- (a) Determinare l'equazione cartesiana della retta r che passa per A e B e il fascio proprio di piani di sostegno r ;
- (b) Determinare, al variare di k , l'equazione cartesiana di tutti i piani che passano per A , B , C_k ;
- (b) Determinare l'equazione cartesiana del piano che passa per A ed è ortogonale a tutti i piani determinati nel punto precedente (c). Motivare la risposta;
- (d) Determinare per quali valori di k i punti A , B , C sono i vertici di un triangolo rettangolo (non degenere). Motivare la risposta.

NOTA: Si consiglia di disegnare il problema.

- (a) Enunciare e dimostrare il teorema di diagonalizzabilità di un endomorfismo;
- (b) Dimostrare che l'ortogonale di un sottospazio vettoriale è un sottospazio vettoriale.

Scannerizzare le pagine

- ▶ ogni pagina in verticale
- ▶ un unico file chiamato **cognome_nome.pdf**
- ▶ caricare il file