FALG_AA2021_3appello_sol

Wednesday, 7 July 2021 09:30

Es 1

$$U = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\0\\0\\-3\end{pmatrix} \right\rangle$$

1) Base e dimensione di U

Calcolo il rango di
$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&2&-1&2\\0&-2&1&-1\\-3&0&0&-3\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}\to\text{IV}+3\text{I}]{\text{III}\to\text{III}+\text{II}-\text{I}} \begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&2&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\dim U = 2$ Base di U :

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix} \right\}$$

Per trovare le equazioni che definiscono U imponiamo

$$rk\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&2&-1&2\\x&y&z&t\end{pmatrix} = 2 \quad \text{Da cui} \quad \begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&2&-1&1\\0&y&z&t-x\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&2&-1&1\\0&0&z+\frac{y}{2}&t-x-\frac{y}{2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} z+\frac{y}{2} = 0 \\ t-x-\frac{y}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+2z=0 \\ 2x+y-2t=0 \end{cases}$$

Quindi

$$U: \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ t.c. } y+2z=0 \text{ e } 2x+y-2t=0 \right\}$$

b) Cerco $W \subset \mathbb{R}^4$ t.c. $\dim(W \cap U) = 1$ e $U+W = \mathbb{R}^4$

Completiamo $\mathcal{B}$ a base di $\mathbb{R}^4$: $\mathcal{C} = \left\{ \underbrace{\underset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}} \underset{v_2}{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix}}}_{\mathcal{B}} \underset{v_3}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}} \underset{v_4}{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}} \right\}$

v_3 e v_4 sono L.I. e $\notin U$

Per cui posso definire (ad esempio)

$$W = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{v_1 \in U}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{\notin U} \right\} \quad \text{in tal modo} \quad U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{e} \quad U + W = \mathbb{R}^4$$

c) $V_1 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix}, u_1 \right\rangle$ e $V_2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix}, u_2 \right\rangle$

con u_1 e $u_2 \in \mathbb{R}^4$

L I da $(1\ 2\ -1\ 2)$ e t.c. $\notin U$

ad esempio $u_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ e $u_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

d) $U^\perp = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ t.c. } \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = 0 \text{ e } \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix} = 0 \right\}$ $\quad \dim U^\perp = 2$

Quindi $\begin{cases} x+t=0 \\ x+2y-z+2t=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x=-t \\ 2y-z+t=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x=-t \\ z=2y+t \end{cases}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ t.c. } \begin{pmatrix}-t\\y\\2y+t\\t\end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

Essendo $U^\perp$ il complemento ortogonale di U

$$U \cap U^\perp = \{\underline{0}\}$$

Es 2

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Dire per quali valori di k A_k è diagonalizzabile (sul campo dei reali)

Il polinomio caratteristico di A_k è

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & k \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + \lambda k + \lambda = \lambda(-\lambda^2 + k + 1)$$

Da cui $\lambda = 0$

$\lambda^2 = k + 1$

- se $k+1 > 0$ ossia se $\boxed{k > -1}$

  il polinomio caratteristico ha 3 radici reali distinte

  $\lambda_1 = 0$ $\quad ma(\lambda_1) = 1 = mg(\lambda_1)$

  $\lambda_2 = \sqrt{k+1}$ $\quad ma(\lambda_2) = 1 = mg(\lambda_2)$

  $\lambda_3 = -\sqrt{k+1}$ $\quad ma(\lambda_3) = 1 = mg(\lambda_3)$

  A_k è diagonalizzabile

- se $k+1 < 0$ ossia se $\boxed{k < -1}$

  il polinomio ha 2 radici complesse

  e non è diagonalizzabile nel campo dei reali

- se $\boxed{k = -1}$ $\quad \lambda_1 = 0$ è autovalore con molteplicità algebrica 3

  calcoliamo la $mg(\lambda_1)$

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (A_{-1} - \overset{0}{\lambda_1} I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \qquad V_{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ +1 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ che ha dimensione 1}$$

$mg(\lambda_1) = 1$ $\quad A_{-1}$ <u>non</u> è diagonalizzabile

→ Si consideri il caso $k=3$ $\boxed{A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$

b) Si dica se A_3 è diagonalizzabile e, in caso, si calcoli la forma diagonale di A_3

Sappiamo che A_3 è diagonalizzabile, infatti $k = 3 > -1$ (vedi pto a)

I 3 autovalori sono
$$\lambda_1 = 0$$
$$\lambda_2 = \sqrt{k+1} = 2$$
$$\lambda_3 = -\sqrt{k+1} = -2$$
e la sua forma diagonale è $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

c) L'endomorfismo f, che ha A_3 come matrice associata, è iniettivo? È suriettivo? È un isomorfismo? Giustificare la risposta

- Essendo 0 un autovalore di A_3, f NON è iniettivo, infatti
$\ker A_3 \neq \{\phi\}$

Possiamo calcolare il $\ker A_3$ => $\begin{cases} y = 0 \\ x + 3z = 0 \end{cases}$ da cui $\boxed{\ker A_3 = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}$

- Inoltre il Teorema delle Dimensioni ci dice che
$$\underbrace{\dim \mathbb{R}^3}_{3} = \underbrace{\dim \ker(f)}_{1} + \underbrace{\dim Im(f)}_{2}$$
NON è suriettiva dato che $\dim W = 3$ mentre $\dim Im(f) = 2$

- Concludiamo che NON può essere un isomorfismo non essendo né iniettiva, né suriettiva

d) Determinare la controimmagine $f^{-1}(v)$ del vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

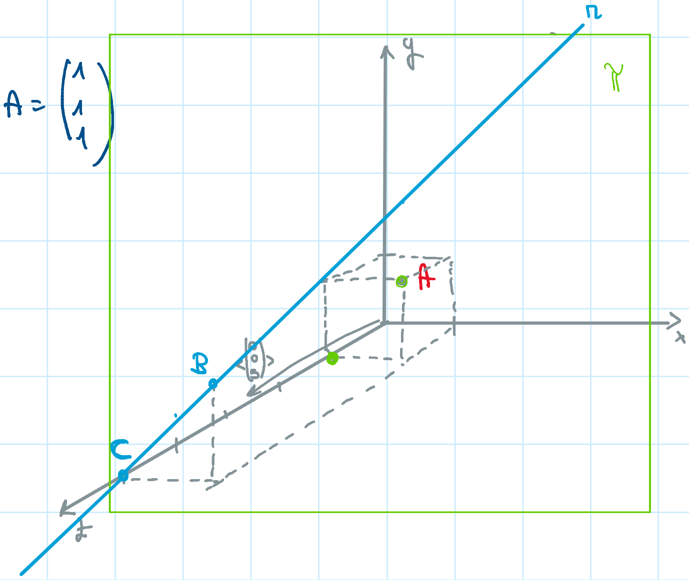
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} y = 1 \\ x + 3z = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

La controimmagine di $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ è $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

infatti $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

ES 3

a) $V_\pi \perp \left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix} \right\rangle$ e π passa per $A = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$



L'equazione generica di un piano è

$\pi: \; ax + by + cz = d$

Conosciamo il vettore normale al piano

$$0x + 0y + 5z = d \quad \Rightarrow \quad 5z = d$$

Sappiamo inoltre che π passa per $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$5 \cdot 1 = d \quad \Rightarrow \pi: \; 5z = 5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\pi := \; z = 1}$$ (piano parallelo al piano x-y)

O in alternativa:

$$(a \;\; b \;\; c)\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix} = 0 \qquad c = 0 \qquad \Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle = V_\pi \qquad \pi: \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

da cui $\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 1 + \beta \\ z = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ eq. cartesiana $z = 1$

b) r passa per $B = \begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}$

$r: \begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$ $\qquad$ $r: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = 5 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\boxed{r: \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 5 \end{cases}}$

eq. vettoriale di r $\qquad$ eq. parametrica di r $\qquad$ eq. cartesiana di r

(bisettrice del 1° e 3° quadrante passante per $\underbrace{(0,0,5)}_{C}$)

c) π e r sono paralleli senza punti in comune (si vede graficamente) dimostriamolo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{III = III - II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} rk(A|b) = 3 \\ rk(A) = 2 \end{array}\right\} \text{parallele senza pti in comune}$$

Sia π che r si intersecano e sono ortogonali all' asse z

Infatti $z = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ è $\perp$ a V_r e a V_π

$$V_r = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad V_\pi = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi \text{ interseca } z \text{ in } P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ r \text{ interseca } z \text{ in } P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{sono pti di minima distanza}$$

La distanza tra π ed r è quindi $\|(P_2 - P_1)\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = 4$

d) $s \in \pi$; s passa per $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $V_s \perp V_r = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\hookrightarrow$ $V_s \perp \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ normale al piano π

$V_s \perp \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

Da cui
$$\begin{cases} (a \quad b \quad c) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ (a \quad b \quad c) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \qquad \boxed{V_s = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}$$

$$s: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad s: \begin{cases} x = 1 + \gamma \\ y = 1 - \gamma \\ z = 1 \end{cases} \qquad \boxed{s: \begin{cases} x + y = 2 \\ z = 1 \end{cases}}$$

Eq. vettoriale di s. | Eq. parametriche di s | Eq. cartesiane di s