FALG-AA2021_2appello_sol

Tuesday, 2 February 2021 19:09

Es2

Sia $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ t.c.
- $Im(\phi) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$
- $\lambda = 2$ é autovalore
- ϕ endomorfismo simmetrico

a) Determinare autovalori e autospazi di ϕ

Sia A la matrice associata a ϕ $\Rightarrow A = A^T \Rightarrow$ ortogonalmente diagonalizzabile

$\Rightarrow$ Se $Im(\phi) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \dim Im(\phi) = \underline{rk(A) = 1}$

$\Rightarrow$ Per il teorema delle dimensioni $\dim \mathbb{R}^3 - rk(A) = \underline{\dim(\ker(\phi)) = 2}$
$3 - 1 = 2$

$\Rightarrow$ A ortogonalmente diagonalizzabile $\Rightarrow$ Autospazi in <u>somma diretta</u>

$\Rightarrow$ 2 é autovalore di A $\Rightarrow A u = \underbrace{2u}_{\in Im(\phi) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle} \Rightarrow u = \alpha \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ t.c. $\alpha \in \mathbb{R}$

quindi $\boxed{V_2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle}$

$\Rightarrow$ Avendo il $\ker(\phi)$ dimensione $\underline{2}$ vuol dire che $\boxed{\lambda = 0}$ é autovalore con $\underline{m.a.(0) = 2}$

$\Rightarrow V_0 \oplus V_2 = \mathbb{R}^3$ ed avendo A simmetrica $\Rightarrow V_0 = V_2^{\perp}$

$\Rightarrow$ Troviamo il complemento ortogonale di $V_2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$

$$V_2^{\perp} : \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0 \right\} = \boxed{\left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\rangle = V_0}$$

Quindi gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 2$ con $m.a.(2) = m.g(2) = 1$
$\lambda_2 = 0$ con $m.a.(0) = mg(0) = 2$

e $V_2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$ e $V_0 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$

b) Determinare una base ortonormale di autovettori di ϕ

Una base di autovettori è $\mathcal{B} = \left\{ \underbrace{\overset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}}_{V_2}, \underbrace{\overset{v_2}{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}}, \overset{v_3}{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}}}_{V_0} \right\}$

V_2 e V_0 sono già $\perp$ ma i due vettori di V_0 non lo sono

Quindi normalizziamo $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

normalizziamo $v_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

usando Gram Schmidt troviamo u_3 t.c. $< v_2, v_3 > = < u_2, u_3 >$

$$u_3 = \frac{v_3 - (v_3 \cdot u_2)u_2}{\| v_3 - (v_3 \cdot u_2) u_2 \|} = \frac{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \right\|}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \right\|} = \frac{\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\-1\end{pmatrix}}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}} = \frac{2}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\\-2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$$

Quindi $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\\-2/\sqrt{6}\end{pmatrix} \right\}$ è una base ortonormale di autovettori

c) $A_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\phi)$? Dato che $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

Allora $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}A\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{3}A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{2}{3}A\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{3}A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}0\\0\\\end{pmatrix} \quad \frac{1}{\ }A\begin{pmatrix}1/\\ \end{pmatrix} \quad \frac{1}{\ }A\begin{pmatrix}1\\ \end{pmatrix} \quad \frac{2}{\ }A\begin{pmatrix}1\\ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}2/3\\ \end{pmatrix}$

$$A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}A\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} - \frac{2}{3}A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix}$$

$$A^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

d) Determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ t.c. $v - \phi(v) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ (*)

Sappiamo che $Im(\phi) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \phi(v) = \alpha \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \forall v \in \mathbb{R}^3, \ \alpha \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow v - \underbrace{\phi(v)}_{\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{v} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \boxed{(\alpha+1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}$$

Sappiamo che vettori di questo tipo $\in V_2$ (sono autovettori associati all' autoval 2)
e quindi $\phi(v) = 2v = 2(\alpha+1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Sostituendo in (*)

$$\underbrace{(\alpha+1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{v} - \underbrace{2(\alpha+1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{\phi(v)} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow -(\alpha+1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = -2}$$

$$\Rightarrow \boxed{v = -1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}$$

ES 1

$$S = \begin{pmatrix} a \\ -b-1 \\ 0 \\ a+b \end{pmatrix} \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \qquad U = \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Base di U (avrà dimensione 2)

$$\begin{cases} x_3 = 4x_1 + 2x_2 \\ x_4 = -2x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

se $x_1 = 0$: $\quad x_3 = 2x_2$, $\quad x_4 = -2x_2$

se $x_2 = 0$: $\quad x_3 = 4x_1$, $\quad x_4 = -2x_1$

$$\Rightarrow \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\4\\-2\end{pmatrix} \right\}$$

b) base di $U^\perp$ e un sistema lineare che abbia $U^\perp$ come insieme delle soluzioni

b) base di $U^\perp$ e un sistema lineare che abbia $U^\perp$ come insieme delle soluzioni

$$U^\perp: \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ t.c. } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \text{ e } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

è un sistema che ha $U^\perp$ come soluzioni

$$U^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Posso ottenerlo risolvendo il sistema o guardando i coeff. di U: $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 1x_4 \\ 2x_1 + 0x_2 - 1x_3 - 1x_4 \end{cases}$

c) Determinare $U \cap S$ scrivo un vettore generico di S e di U e impongo l'uguaglianza

$$\begin{array}{rcl} a & = & \beta \\ -b-1 & = & \alpha \\ 0 & = & 2\alpha + 4\beta \\ a+b & = & -2\alpha - 2\beta \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} a = \beta \\ b = -\alpha - 1 \\ \alpha = -2\beta \end{array}$$

componenti vettore generico di S — comp. vett. generico di S

$$\beta - \alpha - 1 = -2\alpha - 2\beta$$

$$\alpha + 3\beta = 1 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \beta = 1 \\ \alpha = -2 \\ a = 1 \\ b = 1 \end{array}}$$

Quindi il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in S \cap U$

Verifico facilmente che $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in S$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in U$

d) No S non è un sottospazio perché non include il vettore nullo

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

è una sottovarietà lineare di dimensione 2

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

è il più piccolo sottospazio che contiene S e questi 3 vettori rappresentano una sua base essendo L.I.

$\dim W = 3$

Es3

$$r = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}}_{P_r} + \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix} \right\rangle}_{V_r} \qquad s = \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$$

a) Eq. cartesiane di r e parametriche di s

$$r: \begin{cases} x = 1+2\alpha \\ y = 2+\alpha \\ z = -1-3\alpha \end{cases} \leftarrow \text{eq. parametriche} \quad . \quad \begin{cases} \alpha = y-2 \\ x = 1+2y-4 \\ z = -1-3y+6 \end{cases}$$

Da cui

$$\text{Eq. cartesiane di } r: \begin{cases} x-2y = -3 \\ 3y+z = 5 \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} 3x = 2-2\alpha \\ z=\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\alpha \\ y = 1-\alpha-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\alpha = \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$$

$$s: \begin{pmatrix}2/3\\1/3\\0\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}-2/3\\-1/3\\1\end{pmatrix} \right\rangle = \underbrace{\begin{pmatrix}2/3\\1/3\\0\end{pmatrix}}_{P_s} + \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix} \right\rangle}_{V_s}$$

Oss $\underline{V_r = V_s}$

b) Posizione reciproca e distanza di r ed s

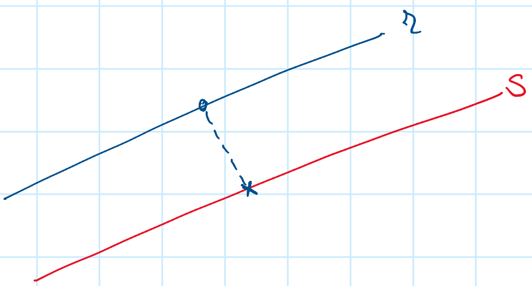
Vedo che le giaciture di r ed s coincidono → sono parallele

Verifico se coincidenti senza punti in comune

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Rette parallele senza punti in comune infatti

$$rk(A) = 2 \neq rk(A|b) = 3$$

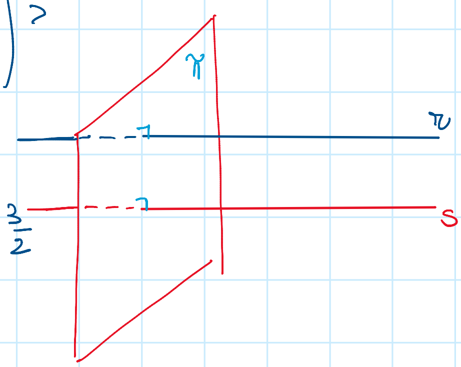


c) **Determino π $\perp r$ e passante per $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$**

$\pi \perp r$ e passante per $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \in s$ Essendo $r \parallel s$ π sarà ortogonale ad entrambe

$V_\pi = V_r^\perp = V_s^\perp$ $V_\pi : \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix} = 0 \right\}$

$V_\pi = < \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix} >$



$\pi = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + < \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix} >$ eq. vettoriali

$\pi = \begin{cases} x = -\alpha + 3\beta \\ y = 2\alpha \\ z = 1 + 2\beta \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\frac{y}{2} + \frac{3}{2}z - \frac{3}{2} \\ \alpha = y/2 \\ \beta = z/2 - 1/2 \end{cases}$

Eq. parametriche $\uparrow$

$\pi : \; 2x + y - 3z = -3$ eq. cartesiana

d) **Distanza fra r ed s**   avevo che $P_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \in s$ e $\in \pi$ (punto precedente)

quindi se trovo l'intersezione di π con r ho trovato due pti di min. distanza

Cerco l'intersezione di π con r

$\begin{cases} 2x + y - 3z = -3 \\ x - 2y = -3 \\ 3y + z = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -3 + 2y \\ z = 5 - 3y \\ -6 + 4y + y - 15 + 9y = -3 \end{cases}$ $\begin{cases} y = \frac{18}{14} = \frac{9}{7} \\ x = -3 + 18/7 = -3/7 \\ z = 5 - 27/7 = 8/7 \end{cases}$

Pti di minima distanza

$P_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \in s$

$P_2 = \begin{pmatrix}-3/7\\9/7\\8/7\end{pmatrix} \in r$

$\|P_2 - P_1\| = \left\| \begin{pmatrix}-3/7\\9/7\\1/7\end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{9}{49} + \frac{81}{49} + \frac{1}{49}} = \sqrt{\frac{91}{49}} = \frac{\sqrt{91}}{7}$