LT in Ingegneria dell'energia

Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria
II appello AA 2020/2021

Docenti: A.Larese, G. Peruginelli

9 febbraio 2021

Regole d'esame

- Essere soli nella stanza.
- Tenere webcam e microfono accesi (no auricolari).
- Posizionarsi a circa 2 metri dal dispositivo connesso su zoom: **la webcam deve inquadrare voi e il tavolo di lavoro.**
- Nel tavolo di lavoro devono essere presenti **solo** i fogli (di bella e brutta), le penne e il dispositivo che utilizzerete per la scansione (disposto con lo schermo rivolto verso il basso).
- NON é consentito l'uso di calcolatrice, testi, appunti o qualsiasi altro materiale al di fuori di quello elencato al punto precedente.
- NON é consentito avvicinarsi al dispositivo connesso su zoom se non per comunicazioni urgenti con i docenti tramite chat.
- NON scollegarsi da zoom prima del termine dell'esame (altrimenti l'esame verrà annullato).

Esercizio 1

Si considerino l'insieme S e il sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ definiti come:

$$S : \left\{ \begin{pmatrix} a \\ -b-1 \\ 0 \\ a+b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}, \quad U : \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare una base di U.

(b) Determinare una base dell'ortogonale di U e un sistema di equazioni che abbia $U^\perp$ come insieme di soluzioni.

(c) Determinare $U \cap S$.

(d) S è un sottospazio? giustificare la risposta. Determinare il più piccolo sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ contenente S, trovando una base di W e la sua dimensione.

Esercizio 2

Sia $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo simmetrico di $\mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{Im}(\phi) =< (1,1,1) >$ e tale che $\lambda = 2$ sia un autovalore di ϕ.

(a) Determinare la dimensione del $ker(\phi)$, gli autovalori e gli autospazi di ϕ (*suggerimento: si pensi alle proprietà degli autospazi degli endomorfismi e delle matrici simmetriche*).

(b) Determinare una base ortonormale di autovettori di ϕ.

(c) Determinare la matrice A associata a ϕ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(d) Determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ per i quali si abbia

$$v - \phi(v) = (1,1,1).$$

Esercizio 3

Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino le rette

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + < \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} >, \quad s : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

(a) Determinare le equazioni cartesiane della retta r e le equazioni parametriche della retta s.

(b) Determinare posizione reciproca tra le rette r e s (parallele, sghembe o incidenti).

(c) Determinare le equazioni cartesiane del piano ortogonale alla retta r e passante per il punto $(0, 0, 1)$.

(d) Determinare la distanza tra r ed s.

Teoria

(a) Dimostrare che il nucleo di un'applicazione lineare è un sottospazio vettoriale;

(b) Sia $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica. Dimostrare che se α e β sono due suoi autovalori distinti, allora gli autospazi V_α e V_β sono ortogonali tra loro.

Scannerizzare le pagine

- ogni pagina in verticale
- un unico file chiamato **cognome_nome.pdf**
- caricare il file

Non scollegarsi da zoom fino alla conferma di ricezione del file da parte dei docenti