AA2021_appello1_ES1

Thursday, 14 January 2021 19:09

Si consideri $S = \left\{ \begin{pmatrix} 2a \\ -1 \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix} \text{ t.c } a \in \mathbb{R} \right\}$

e $U \subset \mathbb{R}^4$ $\quad U: \begin{cases} x_1 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases}$

a) Dimensione e base di U

$$U: \begin{cases} x_1 = 2x_3 + x_4 \\ x_2 = 2x_4 \\ 4x_3 + \cancel{2x_4} - \cancel{2x_4} + 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_2 = 2x_4 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e quindi U ha dimensione 1 e una sua base è

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

b) Determinare $U^\perp$ e una sua base

$$U^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ t.c } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$\dim U^\perp = 3$

infatti $\dim U^\perp = \dim \mathbb{R}^4 - \dim U$

$\Rightarrow x_1 + 2x_2 + x_4 = 0$

Osservo che $\cdot$ x_3 può assumere qualsiasi valore $\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\cdot$ se $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_4 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2 \end{pmatrix}$

- se $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_4 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

- se $x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2x_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Quindi $U^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ essendo 3 vettori L.I. rappresentano una base per $U^\perp$

(verifico facilmente che effettivamente tutti e 3 i vettori sono $\perp$ a $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$)

c) Determinare $U \cap S$

Cerco i vettori $u \in \mathbb{R}^4$ t.c. $u \in U$ e $u \in S$

Un generico vettore di U sarà $u = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Un generico vettore di S sarà $u = \begin{pmatrix} 2a \\ -1 \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix}$

eguagliando componente a componente:

$\Rightarrow \begin{cases} 2a = \alpha \\ -1 = 2\alpha \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \alpha = -\frac{1}{2} \\ a = -\frac{1}{4} \end{array}}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} \in U \cap S$

d) S è sottospazio? Determinare W il più piccolo sottospazio di $\mathbb{R}^4$ che contenga S, determinarne la dimensione e una base.

- No S <u>NON</u> è un sottospazio infatti non contiene il vettore nullo $0_{\mathbb{R}^4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

<u>oppure</u> infatti se prendo $s_1, s_2 \in S$

$s_1 + s_2 \notin S$

ad esempio $s_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in S$, $s_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in S$

ma $s_1 + s_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \notin S$

$s_1 + s_2 = \begin{pmatrix} \cdot \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \notin S$

- $S = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ ...

Il più piccolo sottospazio che contiene S è $\langle S \rangle$

$W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $\dim W = 2$

base di $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

AA2021_appello1_ES2

Thursday, 14 January 2021 17:04

Si consideri al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$ la applicazione lineare definita da

$$B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$$

$f_t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ è definita da

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\\2t\end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\t+1\\2t\end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\t+3\\1-t\end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\t+5\\t-1\end{pmatrix}$$

$$A_B^{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & t+1 & t+3 & t+5 \\ 2t & 2t & 1-t & t-1 \end{pmatrix}$$

- Trovare $A_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\\2t\end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\t+1\\0\end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\\1-t\end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\\2\\-2\end{pmatrix}$$

$$A_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & t+1 & 2 & 2 \\ 2t & 0 & 1-t & -2 \end{pmatrix}$$

Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ A è invertibile?

$$\operatorname{rk} A_t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1-t & -2+2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3+3t \end{pmatrix}$$

- A_t ha rango 3 se $\boxed{t=1}$

- $\forall t \neq 1$ A_t ha rango 4

$\Rightarrow$ A_t è invertibile $\forall t \neq 1$

Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ 0 è autovalore di A?

0 è autovalore se

$A v = 0 v = \underline{0}_{\mathbb{R}^4}$ e quindi (si vede il punto precedente) solo quando il rango di A NON è massimo

$\Rightarrow$ 0 è autovalore $\Leftrightarrow t = 1$

- Per tali valori di t si calcolino autovalori e autospazi e si dica se A è diagonalizzabile

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P_A(x) = \det \begin{pmatrix} 2-x & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2-x & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2-x & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -2-x \end{pmatrix} = (2-x)^2 (x^2-4) - (-2)\, 2\, (2-x)^2 \overset{!}{=} (2-x)^2 (x^2-4+4) = \overset{!}{=} x^2 (2-x)^2$$

$\lambda_0 = 0$ $\quad ma(2)$

$\lambda_1 = 2$ $\quad ma(2)$

$$V_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ t.c. } (A - 0\mathbb{I}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad mg(0) = 1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -x_4 \end{cases}$$

$\Downarrow$

non è diagonalizzabile

$\Uparrow$

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ t.c. } (A - 2\mathbb{I}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad mg(2) = 1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \end{pmatrix} \qquad x_4 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_4 = 0 \\ x_2 = -x_4 = 0 \\ x_1 = 2x_4 = 0 \end{array}$$

- Per quali valori di t la matrice è ORTOGONALMENTE DIAGONALIZZABILE?
  - La matrice è orto. diagonalizzabile sse è simmetrica (in base canonica) per il Teorema Spettrale
  - A è simmetrica per $\boxed{t=-1}$

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} 2-x & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-x & 2 \\ -2 & 0 & 2 & -2-x \end{pmatrix} = (2-x)^2\left[(x^2-4)-4\right] - (-2)(-2)(2-x)^2$$

$$= (2-x)^2\left[x^2-4-4-4\right] = (2-x)^2(x+\sqrt{12})(x-\sqrt{12})$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & -\sqrt{12} & \\ & & & \sqrt{12} \end{pmatrix}$$

AA2021_appello1_ES3

Thursday, 14 January 2021 19:48

In $\mathbb{A}^3$ si considerino i punti

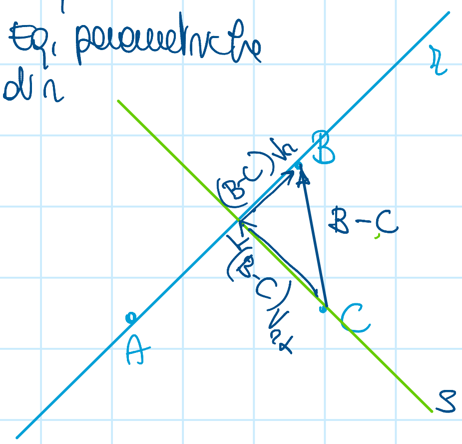
$$A=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

a) Determinare le eq. cartesiane di r retta per AB e s retta $\perp$ a r per C

$$r:\ A+\langle \underbrace{\overrightarrow{B-A}}_{v_r}\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\left\langle\begin{pmatrix}2-1\\2-0\\2-0\end{pmatrix}\right\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\langle\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}}_{v_r}\rangle$$ Eq. vettoriale di r

$$r:\begin{cases}x=1+\alpha\\y=2\alpha\\z=2\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=z\\x=1+\frac{y}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y-z=0\\2x-y-2=0\end{cases}$$ Eq. cartesiane di r

Eq. parametriche di r



Calcolo $\overrightarrow{B-C}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

e considero che $(\overrightarrow{B-C})=(\overrightarrow{B-C})_{v_r}+(\overrightarrow{B-C})_{v_{r^\perp}}$

$$\Rightarrow (B-C)_{v_{r^\perp}}=(\overrightarrow{B-C})-(\overrightarrow{B-C})_{v_r}$$

Calcolo il versore nella direzione di v_r

$$v_r=\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right\rangle \underset{\text{normalizzato}}{=} \left\langle\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$(B-C)_{v_{r^\perp}}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}-\left[\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}-\left[+2\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}-2/3\\-1/3\\2/3\end{pmatrix}$$

Per cui $\quad s:\ C+\langle(B-C)_{v_{r^\perp}}\rangle = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+\left\langle\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\right\rangle$ eq. vettoriale di s

$$s=\begin{cases}x=2+2\beta\\y=1+\beta\\z=-2\beta\end{cases}$$ eq. parametrica di s

$$s = \begin{cases} y = 1+\beta \\ z = -2\beta \end{cases}$$ eq. parametrice di s

$$\begin{cases} x = 2 - z \\ y = 1 - \frac{z}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+z-2=0 \\ 2y+z-2=0 \end{cases}$$ eq. cartesiane di s

b) Determinare π che contenga r e sia $\perp$ a s

• π è $\perp$ a s quindi $\pi: ax+by+cz+d=0$

avrà come vettore ortogonale al piano

$$V_s = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \pi = 2x+y-2z+d=0$$

• π deve contenere r, quindi impongo il passaggio per A (o per B)

$$\Rightarrow \pi(A) = 2\cdot1+0-2\cdot0+d=0 \Rightarrow \boxed{d=-2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi: 2x+y-2z-2=0}$$

c) Calcolare la distanza di C da π e le coordinate del punto di minima distanza

Distanza di C da π = distanza di C da r

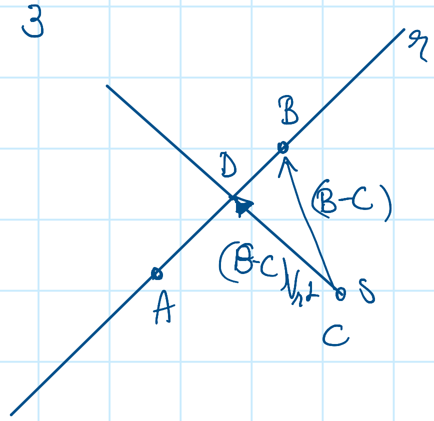
$$\Rightarrow \| (\overrightarrow{B-C})_{V_a\perp} \| = \left\| \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ +2/3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}} = 1$$

Il punto che cerchiamo è l'intersezione tra r ed s

Pto generico di r: $\begin{cases} x_r = 1+\alpha \\ y_r = 2\alpha \\ z_r = 2\alpha \end{cases}$ Punto generico di s = $\begin{cases} x_s = 2+2\beta \\ y_s = 1+\beta \\ z_s = -2\beta \end{cases}$

Impongo $\begin{cases} 1+\alpha = 2+2\beta \\ 2\alpha = 1+\beta \\ 2\alpha = -2\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta = \frac{1}{3} \\ \beta = -\frac{1}{3} \end{cases}$

Il punto che cerchiamo è $D = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$



d) Determinare il fascio di piani di sostegno r

1° modo (rapido)

La retta r è definita come $r: \begin{cases} y - z = 0 \\ 2x - y - 2 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ equazione di un piano π_1
$\Rightarrow$ " " " " π_2

La retta r è l'intersezione di due piani non paralleli, quindi una loro combinazione lineare ci dà tutti i piani di sostegno r

$$\boxed{\Phi = \alpha(y-z) + \beta(2x - y - 2)}$$ FASCIO di piani di sostegno r

2° modo

Devo trovare un altro piano $\neq \pi$ che contenga r

$\pi = 2x + y - 2z - 2 = 0$ $V_\pi = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{V_r}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rangle$

$\perp$ a r: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$
$\perp$ a s: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ $\Bigg\}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\perp a s: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{pmatrix} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\pi_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right.}_{\text{contiene } r}, \left. \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

contiene r
(- passa per A
- $V_r \subset V_{\pi_1}$)

$\to$ basta prendere un vettore non // a $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\pi_1 = \begin{cases} x = 1 + \alpha + \beta \\ y = 2\alpha \\ z = 2\alpha \end{cases} \qquad \boxed{\pi_1 = y - z = 0}$$

Da cui $\quad \boxed{\Phi^* = \gamma\,(2x + y - 2z - 2) + \delta\,(y - z) = 0} \quad \gamma, \delta \in \mathbb{R}$

<u>OSS</u> se confronto Φ e Φ vedo che sono equivalenti:
infatti $\quad 2x + y - 2z - 2 = 2(y - z) + (2x - y - 2)$