ES1 tema A

Wednesday, 19 January 2022 19:38

Es 1 tema A

$$W : \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ t.c. } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \text{ e } \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ t.c. } 2a - b = 0 \quad 2c - d = 0 \right\}$$

$$U : \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4 \text{ t.c. } \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$$

a) Mostrare che W è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e determinare una sua base

Prendo $w_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} \in W$ e $w_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \in W$

Devo dimostrare che una comb. lineare di w_1 e w_2 $\in$ a W

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \overset{?}{\in} W$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \\ \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 \\ \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 \end{pmatrix}$$

Verifico

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \\ \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=0} + \lambda_2 \underbrace{\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=0} = 0 \quad \text{ok}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 \\ \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=0} + \lambda_2 \underbrace{\begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=0} = 0 \quad \text{ok}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W \quad \text{ok}$$

sì W è sottospazio vettoriale

sì W è sottospazio vettoriale

$$2a - b = 0 \qquad 2c - d = 0 \qquad \begin{cases} a = \gamma \\ b = 2\gamma \\ c = \delta \\ d = 2\delta \end{cases}$$

$$\boxed{W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle}$$ è base di W

b) Determinare una base di U

$$U : \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4 \text{ t.c. } \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$$

Da cui $\begin{cases} a = 2\alpha \\ b = 2\beta \\ c = -\alpha \\ d = -\beta \end{cases}$

$$\boxed{U = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}$$ è una base di U

c) Determinare una base di $U \cap W$ e $U + W$

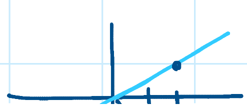
Quando un vettore di U è anche vettore di W?

$$\begin{cases} \gamma = 2\alpha \\ 2\gamma = 2\beta \\ \delta = -\alpha \\ 2\delta = -\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 2\alpha \\ 4\alpha = 2\beta \qquad \beta = 2\alpha \\ \delta = -\alpha \\ (-2\alpha = -2\alpha \quad \text{ok}) \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 2 \\ \delta = -1 \end{cases}$$

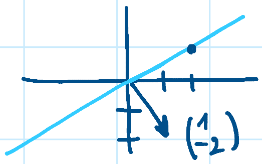
$$\boxed{U \cap W = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}} \qquad U + W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

d) Dire se esiste un vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in U$ o $\in W$ t.c. $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ sono L.I

In W $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ sono entrambi $\perp$ a $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$



quindi $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ $\in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$



quindi $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ $\in \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \right\rangle$
e sono pertanto paralleli tra
loro ovvero
$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = m\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ $m \in \mathbb{R}$ sono L.D <u>sempre</u>

In U $\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$ $\in \left\langle \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$

e quindi $\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix} = n\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$ da cui $a = nb$
$c = nd$

e $\begin{pmatrix}2c\\-c\end{pmatrix} = n\begin{pmatrix}2d\\-d\end{pmatrix}$ ovvero $c\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = nd\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

sono <u>L.D</u> sempre

e) basta sommare i 3 vettori della base di $U + W$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\0\\2\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ sono L.I.

ES2 tema A

Wednesday, 19 January 2022 18:59

ES2 tema A

$f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\qquad A_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a-1 \\ 1-a & -1 & 0 \\ 2-2a & 2a & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad a \in \mathbb{R}$

1) Stabilire per quali valori di a f_a è un isomorfismo

Per essere un isomorfismo f_a deve essere iniettiva e suriettiva

f_a è iniettiva $\iff \ker A_a = \{0_V\} \iff \det A_a \neq 0$

$$\det A_a = (a-1)\det\begin{pmatrix} 1-a & -1 \\ 2(1-a) & 2a \end{pmatrix} = -1(1-a)\left[2a(1-a)-(-1)2(1-a)\right]$$

$$= -1(1-a)\left[(1-a)(2a+2)\right] = -2(1-a)^2(a+1)$$

Quindi $\det A_a \neq 0$ se $\boxed{a \neq 1}$ e $\boxed{a \neq -1}$

Essendo un endomorfismo iniettivo $\Rightarrow$ è anche suriettivo infatti

f_a è suriettiva se $\dim \operatorname{Im}(f_a) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$

per il teorema delle dimensioni

$$\underset{3}{\dim \mathbb{R}^3} = \underset{0}{\dim \ker(f_a)} + \underbrace{rk(A_a)}_{\dim \operatorname{Im}(f_a)}$$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im}(f_a) = 3 = \dim W$

Quindi se $a \neq 1$ e $a \neq -1$ f_a è un isomorfismo

2) Per ogni valore di a calcolare la controimmagine $f_a^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

• se $a \neq \pm 1$ $\quad \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\, f_a$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & a-1 \\ 1-a & -1 & 0 \\ 2-2a & 2a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \text{da cui: } \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & a-1 & 1 \\ 1-a & -1 & 0 & 0 \\ 2(1-a) & 2a & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\mathrm{III}\to\mathrm{III}-2\mathrm{I}]{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1-a & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 1 \\ 0 & 2(a+1) & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{III}\to\mathrm{III}-2(a+1)\mathrm{II}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1-a & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & -2(a^2-1) & -2(a+1) \end{array}\right)$$

$$x = 0$$
$$y = 1 - \frac{a-1}{a-1} = 0 \qquad f^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\\frac{1}{a-1}\end{pmatrix}$$
$$z = \frac{1}{a-1}$$

• se $a = 1$ $\qquad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \mathrm{rk}\, A_1 = 1 \\ \dim(\ker A_1) = 2 \end{array} \Rightarrow \mathrm{Im}(f_1) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\rangle$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \notin \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\rangle \qquad \ker A_1 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

• se $a = -1$ $\qquad A_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \mathrm{rk}\, A_{-1} = 2 \\ \dim(\ker A_{-1}) = 1 \end{array}$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}(f_{-1}) = \left\langle \begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix} \underbrace{\cancel{\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}}}_{\text{è L.D.}} \begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle$$

Quindi $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(f_{-1})$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}\to\text{III}-2\text{I}]{\text{II}\leftrightarrow\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ y = 1 + 2z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{2} + z \\ y = 1 + 2z \end{cases} \qquad f_{-1}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Controllo che $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker f_{-1}$ $\qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ✓

c) • se $a \neq 1$ e $a \neq -1$ $\qquad \ker(f_a) = \{0_V\}$ e $\operatorname{Im}(f_a) = 3 \Rightarrow \ker(f_a) \oplus \operatorname{Im}(f_a) = \mathbb{R}^3$

• se $a = 1$ $\qquad \ker(f_1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $\operatorname{Im}(f_1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \ker(f_1) \oplus \operatorname{Im}(f_1) = \mathbb{R}^3$

dato che i 3 vettori sono L.I.

• se $a = -1$ $\qquad \ker f_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $\operatorname{Im}(f_{-1}) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \ker(f_{-1}) \oplus \operatorname{Im}(f_{-1}) = \mathbb{R}^3$

dato che i 3 vettori sono L.I.

d) Posto $a = 1$ $\qquad f_1$ è diagonalizzabile?

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile $\qquad p_a(x) = \det\begin{pmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & -1-x & 0 \\ 0 & 2 & -x \end{pmatrix} = x^2(-1-x) = 0$

$\lambda_1 = 0$ è autovalore e $V_0 = \ker(A_1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ (punto precedente)

$\lambda_2 = -1$ $\quad ma(1) = 1 = mg(1)$ $\qquad$ e $\quad V_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } [A - (-I)]\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

A_1 è diagonalizzabile

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x = -y \\ z = -2y \end{matrix} \rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \operatorname{Im}(f_{-1})$$

$$A_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Per cui una matrice P t.c. $P^{-1}A_1P$ ha come colonne gli autovettori di A_1

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ES3 tema A

Friday, 21 January 2022 15:03

ES 3)

tema A

$$r = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\pi_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\pi_2 = x - y + z = 3$$

a) Determinare una forma parametrica della retta t t.c.

t retta $\perp$ π_1 e passante per $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = P$

$V_{\pi_1} = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} \right\rangle$ cerco $V_{\pi_1}^{\perp}$ imponendo $\begin{cases} \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -y + 3z = 0 \\ x + 2(3z) - 2z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 3z \\ x = -4z \end{cases}$

$V_{\pi_1}^{\perp} = \left\langle \begin{pmatrix}-4\\3\\1\end{pmatrix} \right\rangle = V_t$ giacitura della retta t

da cui:

$$\boxed{t = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}-4\\3\\1\end{pmatrix} \right\rangle}$$ Eq. vettoriale di t

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 - 4\alpha \\ y = 2 + 3\alpha \\ z = 2 + \alpha \end{cases}}$$ Eq. parametriche di t.

$$\boxed{\begin{matrix} x + y + z = 5 \\ x + 4z = 9 \end{matrix}}$$ Eq cartesiane di t

$$\boxed{\begin{cases} y = 2+5\alpha \\ z = 2+\alpha \end{cases}} \qquad \boxed{x+4z=1} \text{ di } r$$

b) Determinare una forma parametrica della retta $s = \pi_1 \cap \pi_2$

Dal punto precedente $V_{\pi_1^\perp} = \left\langle \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e quindi

$\pi_1 = -4x+3y+z = d$ impongo che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \pi_1$ $\quad 0+0+1=d$

Da cui

$$\boxed{\pi_1 = -4x+3y+z=1}$$

$$s = \begin{cases} -4x+3y+z=1 \\ x-y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1+4x-3y \\ x-y+1+4x-3y-2=0 \quad 5x-4y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{4}+\frac{5}{4}x \\ z = 1+4x+\frac{3}{4}-\frac{15}{4}x = \frac{7}{4}+\frac{1}{4}x \\ x = \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \alpha \\ y = -\frac{1}{4}+\frac{5}{4}\alpha \\ z = \frac{7}{4}+\frac{1}{4}\alpha \end{cases} \text{ Eq parametrica di } s$$

$$s = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/4 \\ 7/4 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 5/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} \right\rangle = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 \\ -1/4 \\ 7/4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 5/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}} + \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{4\begin{pmatrix} 1 \\ 5/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}} \right\rangle$$ Eq. vettoriale di s

c) Posizione e distanza fra r e s

$V_r = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = V_s$

Verifico se coincidenti o parallele : il pto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in s \Rightarrow$ controllo

Verifico se coincidenti o parallele : il pto $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \in s$ => controllo se $\overset{?}{\in} r$

$$2+4\alpha = 1 \longrightarrow 2+4\cdot\frac{1}{5} \neq 1$$
$$0+5\alpha = 1 \to \alpha = 1/5$$
$$3+\alpha = 2 \longrightarrow 3+\frac{1}{5} \neq 2$$

No non hanno punti in comune

=> r e s sono PARALLELE senza nessun punto in comune.

Trovo il piano ⊥ a r ed s (il piano la cui normale e $\begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix}$)

$$\sigma : 4x+5y+z = d$$

impongo il passaggio per $\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} \in r$ $\quad 8+0+3 = \underline{11 = d}$

$$\boxed{\sigma : 4x+5y+z = 11}$$

Cerco l'intersezione con s : $\sigma \cap s$

$$\begin{cases} 4x+5y+z = 11 \\ -4x+3y+z = 1 \\ x-y+z = 2 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 1 & 11 \\ -4 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 2 & 12 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & \cancel{42}\ 1 & \cancel{84}\ 2 \end{array}\right]$$

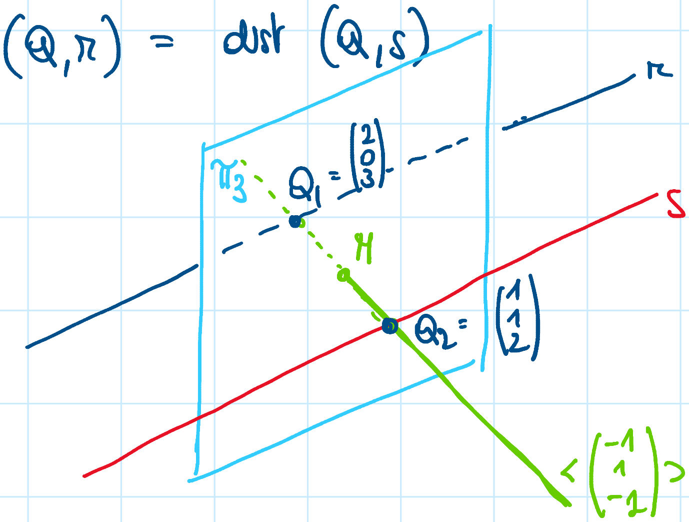
Da cui
$$x = 2+y-z = 1$$
$$y = -9+5z = 1$$
$$z = 2$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad e \quad Q_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{dist}(r, s) = \operatorname{dist}(Q_1, Q_2) = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{3}$$

d) determinare tutti i punti Q dello spazio euclideo per i quali

$$\operatorname{dist}(Q, r) = \operatorname{dist}(Q, s)$$



Il piano che cerchiamo ha come normale il vettore $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ per cui la sua eq cartesiana sarà

$\pi_3 = -x + y - z = d$ Imponiamo il passaggio per M per determinare d

$$M = \frac{Q_1 + Q_2}{2} = \begin{pmatrix} \frac{2+1}{2} \\ \frac{0+1}{2} \\ \frac{3+2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$-\frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = d \qquad \boxed{d = -\frac{7}{2}}$$

$$\boxed{\pi_3 = -x + y - z = -\frac{7}{2}}$$