

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ing. dell'energia - Ing. meccanica (canale 3)

Docenti: C. Bertolin, A. Larese, P. Magrone

II appello 2021/22

Cognome e Nome: _____

Data: 12/09/2022

Tema: A

Matricola: _____

- **ESERCIZIO 1.** Siano $v_1 := (1, 1, 0)$, $v_2 := (1, 0, 1)$ vettori in \mathbb{R}^3 e sia $U := \langle v_1, v_2 \rangle$ il sottospazio da essi generato.
 - (a) Determinare il sottospazio U^\perp complemento ortogonale di U , ed una sua base. (2 pts)
 - (b) Si determini un sottospazio W non banale, che sia complementare ad U , ma non ortogonale, ed una sua base. (2 pts)
 - (c) Determinare la proiezione del vettore $v := (1, 1, 1)$ su U^\perp . (2 pts)
 - (d) Applicare il procedimento di Gram-Schmidt ai vettori $\{v_1, v_2, v_1 \times v_2\}$ in modo da ottenere una base ortonormale. (2 pts)

- **SOLUZIONI 1.**

- (a) U^\perp è generato da $v_1 \times v_2 = (1, -1, -1)$.
- (b) Possiamo scegliere, per esempio, W generato da $v_1 + v_1 \times v_2$.
- (c) La proiezione richiesta è $\frac{-1}{3}(1, -1, -1)$.
- (d) Applicando G-S troviamo $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2)$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1)$.

- **ESERCIZIO 2.**

Sia ϕ l'endomorfismo di \mathbb{R}^3 che soddisfa queste proprietà: $\ker(\phi)$ è il piano di \mathbb{R}^3 avente vettore normale uguale a $v = (1, 2, -1)$ e $u = (1, -1, 1)$ è un autovettore di ϕ relativo all'autovalore $\lambda = -1$.

- (a) Determinare una base del nucleo e dell'immagine di ϕ . (2 pts)
- (b) Per quale valore di $t \in \mathbb{R}$, il vettore $v = (t, 1, 1)$ appartiene al nucleo di ϕ ? (2 pts)
- (c) Determinare la matrice $M = M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_3}(\phi)$ associata a ϕ rispetto alla base canonica \mathcal{E}_3 . (2 pts)
- (d) Determinare se ϕ è diagonalizzabile e in caso affermativo, trovare una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale D . Scrivere esplicitamente D in tal caso. (2 pts)

• **SOLUZIONI 2.**

(a) $\ker(\phi) = \langle (1, 0, 1), (-2, 1, 0) \rangle$ e $\text{Im}(\phi) = \langle u \rangle$.

(b) $t = -1$.

(c) $M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_3}(\phi) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$.

(d) $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

• **ESERCIZIO 3.**

Nello spazio euclideo tridimensionale si consideri il piano

$$\pi : 3x - y + z = -2$$

(a) Determinare le equazioni parametriche del piano π ; (2 pts)

(b) Determinare l'equazione cartesiana della retta r ortogonale a π e passante per $P = (0, 2, 0)$; (2 pts)

(c) Determinare le proiezioni ortogonali dei punti $Q_1 = (3, 1, 1)$ e $Q_2 = (1, 0, -5)$ su π ; (2 pts)

(d) Determinare l'equazione cartesiana del piano σ che contiene r e passa per Q_2 . (2 pts)

• **SOLUZIONI 3.**

(a) $(0, 0, -2) + \langle (1, 0, -3), (0, 1, 1) \rangle$

(b) $r : \begin{cases} x - 3z = 0 \\ y + z = 2 \end{cases}$

(c) $Q_1 \in r$ quindi la sua proiezione è $\overline{Q_1} = r \cap \pi = P$, mentre $Q_2 \in \pi$ e quindi è esso stesso la sua proiezione ortogonale su π , ossia $\overline{Q_2} = Q_2$;

(d) $\sigma : -7x - 16y + 5z + 32 = 0$.

• **TEORIA**

(a) Dimostrare che matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico. (3 pts)

(b) Verificare che il nucleo di un'applicazione lineare $f : V \rightarrow W$ è un sottospazio vettoriale del dominio V . (3 pts)

REGOLE D'ESAME:

- **Compilare ogni foglio in ogni sua parte** (nome, cognome, matricola, corso di laurea, tema del compito, etc.). Non verranno corretti fogli senza questi dati.
- **Consegnare questo foglio e solo i fogli protocollo di BELLA COPIA.**
- **NON consegnare fogli di brutta copia.**
- **Verrà valutato solo quanto scritto a penna.**
- È possibile **ritirarsi** dalla prova in qualsiasi momento: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio del testo d'esame e sui fogli di bella copia.
- **Risaltare in maniera evidente il numero dell'esercizio che si sta svolgendo.**
- NON è consentito uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- NON è consentito l'uso di libri, appunti, telefoni, smartwatch e calcolatrici di ogni tipo.
- NON è consentito comunicare con altri candidati durante la prova.