FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ing. dell'energia - Ing. meccanica (canale 3)

Docenti: C. Bertolin, A.Larese, P. Magrone

II appello 2021/22
Data: 17/06/2022
Tema: A

Cognome e Nome: ____________________________

Matricola: ____________________________

- ***ESERCIZIO 1.*** Si considerino la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f(1,1,0) = (2,0,1)$$

$$f(1,0,1) = (2,-1,3)$$

$$f(1,1,-1) = (2,1,-1).$$

(a) Verificare che f definisce un unico endomorfismo di $\mathbb{R}^3$. (2 pti)

(b) Calcolare la matrice associata ad f rispetto alla base canonica. (2 pti)

(c) Determinare la dimensione e una base di $\ker(f)$ ed $\operatorname{im}(f)$. Inoltre stabilire se $\ker(f) \oplus \operatorname{im}(f) = \mathbb{R}^3$. (2 pti)

(d) Dire, motivando la risposta, se f è diagonalizzabile. (2 pti)

- ***SOLUZIONI 1.***

(a) Esiste un unico endomorfismo che verifica le condizioni richieste poiché i vettori $(1,2,0)$, $(2,0,1)$, $(0,1,-3)$ formano una base di $\mathbb{R}^3$.

(b) La matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(c) Risulta $\dim(\operatorname{im}(f)) = 2$ ed una base di $\operatorname{im}(f)$ è $\{(2,0,1),(0,-1,2)\}$, mentre $\dim(\ker(f)) = 1$ ed una base di $\ker(f)$ è $\{(0,1,0)\}$. Poiché i tre vettori $(2,0,1)$, $(0,-1,2),(0,1,0)$ sono linearmente indipendenti, abbiamo che $\ker(f) \oplus \operatorname{im}(f) = \mathbb{R}^3$.

(d) Gli autovalori di f sono 0 di molteplicità 1 e 2 di molteplicità 2. Poiché l'autospazio relativo all'autovalore 2 è $V_2 =< (0,1,-2) >$, abbiamo che $\dim V_2 < 2$ e dunque l'endomorfismo f non è diagonalizzabile.

- ***ESERCIZIO 2.*** Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = (2, -1, 0, 1),\ v_2 = (1, 1, -2, -1),\ \ v_3 = (3, 0, -2, 0), v_4 = (0, 1, 0, 1)$$

  (a) Sia U il sottospazio generato da v_1, v_2. Determinare un sistema di equazioni lineari che abbia U come insieme di soluzioni.

  (b) Sia V il sottospazio generato da v_3 e v_4. Determinare una base di $V \cap U$.

  (c) Determinare una base di $V + U$.

  (d) Determinare una base del complemento ortogonale di $V \cap U$.

- ***SOLUZIONI 2.***

  (a) $U : x_2 + x_4 = 0, 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0$

  (b) $V \cap U =< v_3 >$

  (c) $V + U =< v_1, v_2, v_4 >$

  (d) $(V \cap U)^\perp =< (2, 0, 3, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1) >$

- ***ESERCIZIO 3.*** Nello spazio euclideo tridimensionale, si consideri il piano π passante per i punti $A = (1, 1, 0)$, $B = (1, -1, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$.

  (a) Determinare una forma cartesiana ed una forma parametrica per il piano π.

  (b) Determinare una forma cartesiana ed una forma parametrica della retta r passante per il punto A ed ortogonale al piano π.

  (c) Determinare posizione reciproca e distanza della retta r dalla retta s passante per i punti B e c.

  (d) Determinare tutti i punti del piano π a distanza $\sqrt{6}$ dalla retta s.

- ***SOLUZIONI 3.***

  (a) forma parametrica: $\pi = (0, 0, 1)+ < (1, 1, -1), (1, -1, -1) >$
  forma cartesiana: $\pi : x + z = 1$

  (b) forma parametrica: $r = (1, 1, 0)+ < (1, 0, 1) >$
  equazioni per r: $x - z = 1$ e $y = 1$

  (c) Le rette r e s sono non parallele poichè r è ortogonale a π e s è parallela a π. Dunque sono incidenti oppure sghembe. Inoltre si ha $s = (0, 0, 1)+ < (1, -1, -1) >$ e

$$\mathrm{dist}(r, s) = \mathrm{dist}(A, s) = ||(1, 1, -1) - \frac{(1, 1, -1) \cdot (1, -1, -1)}{(1, -1, -1) \cdot (1, -1, -1)}(1, -1, -1)||$$

$$||(1, 1, -1) - \frac{1}{3}(1, -1, -1)|| = \frac{1}{3}||(2, 4, -2)|| = \frac{2}{3}\sqrt{6} \neq 0$$

  dunque le rette sono sghembe.

(d) i punti di r distanti $\sqrt{6}$ da s formano le due rette
$s' = (1,2,0) + < (1,-1,-1) >$ e
$s'' = (-1,-2,2) + < (1,-1,-1) >$

- ***TEORIA***

  (a) Se $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ è simmetrica, allora tutte le radici del polinomio caratteristico di A sono reali. (3 pti)

  (b) Enunciare e dimostrare il teorema di Rouché-Capelli. (3 pti)

REGOLE D'ESAME:

- **Compilare ogni foglio in ogni sua parte** (nome, cognome, matricola, corso di laurea, tema del compito, etc.). Non verranno corretti fogli senza questi dati.
- **Consegnare questo foglio e solo i fogli protocollo di BELLA COPIA.**
- **NON consegnare fogli di brutta copia**.
- **Verrà valutato solo quanto scritto a penna**.
- È possibile **ritirarsi** dalla prova in qualsiasi momento: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio del testo d'esame e sui fogli di bella copia.
- **Risaltare in maniera evidente il numero dell'esercizio che si sta svolgendo**.
- NON è consentito uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- NON è consentito l'uso di libri, appunti, telefoni, smartwatch e calcolatrici di ogni tipo.
- NON è consentito comunicare con altri candidati durante la prova.