FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ing. dell'energia - Ing. meccanica (canale 3)

Docenti: C. Bertolin, A.Larese, P. Magrone

II appello 2021/22
Data: 08/02/2022
Tema: A

Cognome e Nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

- ***ESERCIZIO 1.*** Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{W} = \Big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \quad \text{t.c.} \quad x_1 - 2x_3 = 0; \quad x_1 - x_3 - x_4 = 0, \Big\}$$
$$\mathcal{Z} =< (0, 1, -1, 0), (2, -1, 2, 1), (2, 1, 0, 1) > .$$

(a) Dimostrare che $\mathcal{W}$ è un sottospazio vettoriale e calcolare una base e la dimensione di $\mathcal{W}$ e di $\mathcal{Z}$. (2 pti)

(b) Calcolare una base e la dimensione di $\mathcal{W} \cap \mathcal{Z}$ e $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$. Stabilire se $\mathcal{Z}$ e $\mathcal{W}$ sono in somma diretta. (2 pti)

(c) Stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ il vettore $(h + 1, h, -h, 1)$ appartiene a $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$. (2 pti)

(d) Definire, se esiste, il complemento ortogonale di $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$ e calcolarne la dimensione e una base. (2 pti)

- ***ESERCIZIO 2.***

In $\mathrm{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, spazio vettoriale delle matrici quadrate reali di ordine 2, si consideri l'endomorfismo $f : \mathrm{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ così definito

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b-c \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare la matrice associata a f rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

di $\mathrm{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ nel dominio e nel codominio. (2 pti)

(b) Determinare la dimensione e una base sia di $\ker f$ che di $\mathrm{im} f$. (2 pti)

(c) Determinare la controimmagine $f^{-1}(\mathbf{z})$ del vettore $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e la controimmagine $f^{-1}(\mathcal{S})$ del sottospazio vettoriale $\mathcal{S} = \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{R}\}$ delle matrici simmetriche di $\mathrm{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. Stabilire se $f^{-1}(\mathbf{z})$ e $f^{-1}(\mathcal{S})$ sono dei sottospazi vettoriali del dominio. (2 pti)

(d) Determinare la matrice associata all'endomorfismo $f \circ f$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ su dominio e codominio. (2 pti)

- ***ESERCIZIO 3.***

Nello spazio euclideo tridimensionale, si considerino la retta

$$r : \begin{cases} 5x + y = 0 \\ x + z = -4 \end{cases}$$

ed i 2 punti $P_1 = (0, 1, 0),\ P_2 = (0, -1, 1)$.

(a) Determinare le equazioni parametriche di r e le equazioni cartesiane della retta s passante per P_1 e P_2. (2 pti)

(b) Determinare l' equazione cartesiana del piano π passante per P_1 e P_2 e parallelo alla retta r. (2 pti)

(c) Determinare la distanza di r da π. (2 pti)

(d) Determinare l'equazione cartesiana del piano π' contentente r e perpendicolare a π. (2 pti)

NOTA: Si consiglia di disegnare il problema.

- ***TEORIA***

(a) Dimostrare che matrici simili hanno lo stesso determinante. (3 pti)

(b) Enunciare e dimostrare la disuguaglianza triangolare. (3 pti)

REGOLE D'ESAME:

- **Compilare ogni foglio in ogni sua parte** (nome, cognome, matricola, corso di laurea, tema del compito, etc.). Non verranno corretti fogli senza questi dati.
- **Consegnare questo foglio e solo i fogli protocollo di BELLA COPIA.**
- **NON consegnare fogli di brutta copia**.
- **Verrà valutato solo quanto scritto a penna**.

- È possibile **ritirarsi** dalla prova in qualsiasi momento: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio del testo d'esame e sui fogli di bella copia.
- **Risaltare in maniera evidente il numero dell'esercizio che si sta svolgendo**.
- NON è consentito uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- NON è consentito l'uso di libri, appunti, telefoni, smartwatch e calcolatrici di ogni tipo.
- NON è consentito comunicare con altri candidati durante la prova.