

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ing dell'energia

Docenti: C. Bertolin, A.Larese, P. Magrone

I appello 2021/22

Cognome e Nome: _____

Data: 18/01/2022

Tema: A

Matricola: _____

• **ESERCIZIO 1.**

Sia W l'insieme dei vettori $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tali che (a, b) e (c, d) sono ortogonali al vettore $v = (2, -1)$. Sia U l'insieme dei vettori $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tali che (a, c) e (b, d) appartengono al sottospazio $\langle v \rangle$.

- (a) Mostrare che W è un sottospazio di \mathbb{R}^4 e determinare una sua base. (2 pts)
- (b) Determinare una base di U . (2 pts)
- (c) Determinare una base di $U \cap W$ e di $U + W$. (2 pts)
- (d) Dire se esiste un vettore (a, b, c, d) in U o in W tale che $(a, b), (c, d)$ sono linearmente indipendenti (motivare la risposta). (2 pts)
- (e) (FACOLTATIVO) Dire se esiste un vettore (a, b, c, d) in $U + W$ tale che $(a, b), (c, d)$ sono linearmente indipendenti. (2 pts)

• **ESERCIZIO 2.**

Sia $f_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo la cui matrice associata rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3 è la matrice

$$A_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a-1 \\ 1-a & -1 & 0 \\ 2-2a & 2a & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

- (a) Stabilire per quali valori di a f_a è un isomorfismo. (2 pts)
- (b) Per ogni valore di a calcolare la controimmagine $f_a^{-1}((1, 0, 0))$. (2 pts)
- (c) Stabilire per quali valori di a si ha $\ker f_a \oplus \operatorname{im} f_a = \mathbb{R}^3$. (2 pts)
- (d) Posto $a = 1$, stabilire se f_a è diagonalizzabile, e, in caso affermativo, determinare una matrice di cambiamento di base P che diagonalizza f_a , ossia $P^{-1}A_aP$ è diagonale. (2 pts)

• **ESERCIZIO 3.**

Nello spazio euclideo tridimensionale, si considerino la retta

$$r = (2, 0, 3) + \langle (4, 5, 1) \rangle$$

ed i piani

$$\pi_1 : (0, 0, 1) + \langle (1, 1, 1), (1, 2, -2) \rangle \quad \text{e} \quad \pi_2 : x - y + z = 2.$$

- (a) Determinare una forma parametrica della retta t ortogonale al piano π_1 e passante per il punto $P = (1, 2, 2)$. (2 pts)
- (b) Determinare una forma parametrica della retta $s = \pi_1 \cap \pi_2$. (2 pts)
- (c) Determinare posizione reciproca e distanza tra le rette r e s . (2 pts)
- (d) Determinare tutti i punti Q dello spazio euclideo, per i quali

$$\text{dist}(Q, r) = \text{dist}(Q, s)$$

(2 pts)

NOTA: Si consiglia di disegnare il problema.

• **TEORIA**

- (a) Enunciare e dimostrare il “Teorema delle dimensioni”. (3 pts)
- (b) Dimostrare che autospazi relativi ad autovalori distinti sono in somma diretta. (3 pts)

REGOLE D’ESAME:

- **Compilare ogni foglio in ogni sua parte** (nome, cognome, matricola, corso di laurea, tema del compito, etc.). Non verranno corretti fogli senza questi dati.
- **Consegnare questo foglio e solo i fogli protocollo di BELLA COPIA.**
- **NON consegnare fogli di brutta copia.**
- **Verrà valutato solo quanto scritto a penna.**
- È possibile **ritirarsi** dalla prova in qualsiasi momento: scrivere, ben visibile, la lettera ”R” sul foglio del testo d’esame e sui fogli di bella copia.
- **Risaltare in maniera evidente il numero dell’esercizio che si sta svolgendo.**
- NON è consentito uscire dall’aula prima di aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- NON è consentito l’uso di libri, appunti, telefoni, smartwatch e calcolatrici di ogni tipo.
- NON è consentito comunicare con altri candidati durante la prova.