Appello2

Tuesday, 14 February 2023 09:31

ES1 Risolvere l'equazione $z^2 = \bar{z}^2$

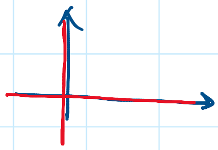
$z = a + ib$

$\bar{z} = a - ib$

$$(a+ib)^2 = (a-ib)^2$$

$$\Rightarrow \cancel{a^2} + \cancel{i^2 b^2} + 2iab = \cancel{a^2} + \cancel{i^2 b^2} - 2iab$$

$\Rightarrow ab = 0$ o a o b devono essere nulli



se $a = 0$ $\Rightarrow$ immaginari puri (asse delle ordinate)

se $b = 0$ $\Rightarrow$ reali (asse delle ascisse)

ES2 $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ t.c.

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_4 \\ x_3 \\ -x_2 \\ x_1 + x_4 \end{pmatrix}$$

a) $M_\mathcal{E}^\mathcal{E}(f)$ e $M_\mathcal{B}^\mathcal{B}(f)$ con $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Calcolo le immagini dei vettori di $\mathcal{E}$ (base canonica di $\mathbb{R}^4$)

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da cui

$$M_\mathcal{E}^\mathcal{E}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolo le immagini di $\mathcal{B}$

$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_\mathcal{E}$ le sue coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ sono $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_\mathcal{B}$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_\mathcal{E} \Rightarrow 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_\mathcal{B}$$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_\mathcal{E} \quad 0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_\mathcal{B}$$

$$f\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad 1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}_B$$

Da cui

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

In alternativa si poteva considerare

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4_{\mathcal{E}} & \xrightarrow[f]{M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)} & \mathbb{R}^4_{\mathcal{E}} \\ H^{-1}\uparrow Id_{\mathbb{R}^4} & & Id_{\mathbb{R}^4}\downarrow H \\ \mathbb{R}^4_B & \xrightarrow[M_B^B(f)]{f} & \mathbb{R}^4_B \end{array} \qquad M_B^B(f) = H\, M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)\, H^{-1}$$

$$H = Id_{V\,\mathcal{E}}^{\;B} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad H^{-1} = \left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

Da cui

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

b) Dire se f è iniettiva o suriettiva

$$rk\left(M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)\right) = 3$$

$$\Downarrow$$

$\dim Im(f) = 3$
$\dim Ker(f) = 1$ Per il teorema delle dimensioni

Un endomorfismo è iniettivo $\Leftrightarrow \dim Ker f = 0$ $\Rightarrow$ f NON è iniettiva

$\dim Im(f) < \dim \mathbb{R}^4$ $\Rightarrow$ f NON è suriettiva

c) Calcolare $f^{-1}(z)$ $\quad z = \begin{pmatrix}2\\0\\0\\2\end{pmatrix}$. $\quad f^{-1}(z)$ è sottospazio di $\mathbb{R}^4$?

$$\mathrm{Im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

$z \in \mathrm{Im}(f)$ infatti $z = 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 2 \\ x_3 = 0 \\ -x_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 2 - x_4 \\ x_2 = x_3 = 0 \end{cases} \qquad f^{-1}(z) = \underbrace{\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}}_{\text{sol particolare}} + \overbrace{\left\langle \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle}^{\ker(f)}$$

$f^{-1}(z)$ non è sottospazio vettoriale ma è una varietà lineare

d) Autovalori di f e rispettivi autospazi. f è diagonalizzabile?

$$p_A(f) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-x \end{pmatrix} = (1-x) \det \begin{pmatrix} -x & 1 & 0 \\ -1 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 1-x \end{pmatrix} - 1 \det \begin{pmatrix} 0 & -x & 1 \\ 0 & -1 & -x \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (1-x)\left(x^2(1-x) - (-1)(1-x)\right) - 1\left(x^2 - (-1)\right)$$

$$= (1-x)(1-x)(x^2+1) - (x^2+1)$$

$$= (x^2+1)(\cancel{1} + x^2 - 2x - \cancel{1}) = x(x-2)(x^2+1)$$

$\lambda_0 = 0 \qquad ma(0) = mg(0) \qquad V_0 = \ker f = \left\langle \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$

$\lambda_1 = 2 \qquad ma(2) = mg(2) \qquad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ t.c. } (A - 2I)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$

$\lambda_{3,4} \notin \mathbb{R}$

$\Downarrow$

f non è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$x_1 = x_4$

$x_3 = x_2$

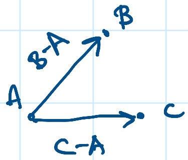
$x_3 = -x_2$

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

ES3)

in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ $\quad A = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix}1\\-1\\-4\end{pmatrix}$

a) Determinare π passante per A, B, C



Determino i vettori B-A e C-A e poi calcolo il prodotto vettoriale per trovare la normale al piano π

$$\vec{AB} = B-A = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \vec{AC} = C-A = \begin{pmatrix}1\\0\\-5\end{pmatrix} \qquad \vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -5e_1 - (5-1)e_2 + (-1)e_3$$

Vettore normale al piano π $\quad n = \begin{pmatrix}-5\\-4\\-1\end{pmatrix}$ e quindi anche $\begin{pmatrix}5\\4\\1\end{pmatrix}$

Da cui $\pi = ax + by + cz + d = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x + 4y + 1z + d = 0$

Per determinare d impongo il passaggio per uno dei 3 punti A B e C

$$5(0) + 4(-1) + 1(1) + d = 0 \Rightarrow \boxed{d = 3}$$

$$\boxed{\pi:\ 5x + 4y + z + 3 = 0}$$

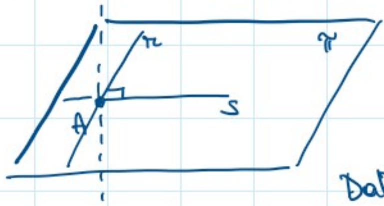
b) r passante per $A = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ e per il punto medio di BC (M)

$$M = \begin{pmatrix} \frac{x_C + x_B}{2} \\ \frac{y_C + y_B}{2} \\ \frac{z_C + z_B}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-1}{2} \\ \frac{-1+0}{2} \\ \frac{-4+2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$r:\ A + \langle M - A \rangle = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0-0 \\ -1/2+1 \\ -1-1 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$r: \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 + 1/2\,\alpha \\ z = 1 - 2\alpha \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} x = 0 \\ 4y + z + 3 = 0 \end{cases}}$$ Eq. cartesiane retta r.

c) s passa per A, $\subset \pi$, $\perp r$



s è ortogonale ad r ed essendo contenuta nel piano π è anche $\perp$ alla normale al piano

Dato che l'eq. cartesiana di π è: $5x+4y+z+3=0$

sappiamo che la giacitura di ogni retta $\perp$ al piano

sarà $V_{\pi^\perp} = \left\langle \begin{pmatrix}5\\4\\1\end{pmatrix} \right\rangle$ (complemento ortogonale di V_π)

Quindi cerchiamo un vettore $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}0\\+1/2\\-2\end{pmatrix}$ e $\perp \begin{pmatrix}5\\4\\1\end{pmatrix}$

Uso il prodotto vettoriale

$$V_{\pi^\perp} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 1/2 & -2 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2} - (-8)\right) e_1 - \left(-(-10)\right) e_2 + \left(-\frac{5}{2}\right) e_3$$

$$= \frac{17}{2} e_1 - 10\, e_2 - \frac{5}{2} e_3$$

$$V_{\pi^\perp} = \left\langle \begin{pmatrix}17/2\\-10\\-5/2\end{pmatrix} \right\rangle = V_s$$

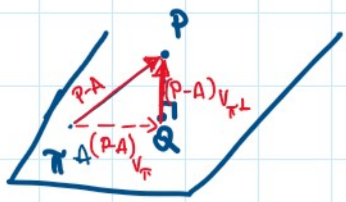
$$\boxed{s = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}17/2\\-10\\-5/2\end{pmatrix} \right\rangle}$$

$$\begin{cases} x = \frac{17}{2}\beta \\ y = -1 - 10\beta \\ z = 1 - \frac{5}{2}\beta \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta = \frac{2}{17}x \\ y = -1 - 10\left(\frac{2}{17}\beta\right) \\ z = 1 - \frac{5}{2}\left(\frac{2}{17}\beta\right) \end{cases}$$

Da cui

$$\boxed{s: \begin{cases} 20x + 17y + 17 = 0 \\ 5x + 17z - 17 = 0 \end{cases}}$$

d)



$P = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ Considero un vettore che collega P ad un punto QUALSIASI del piano π.

Ad esempio $A = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

Sappiamo che P-A si può scrivere come somma di un vettore contenuto in π $\left((P-A)_{V_\pi}\right)$ e uno ortogonale al piano $\left((P-A)_{V_{\pi^\perp}}\right)$

$$(P-A)_{V_{\pi^\perp}} = P - Q = \vec{QP} =$$

Il versore normale al piano è $\dfrac{\begin{pmatrix}5\\4\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{25+16+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}5\\4\\1\end{pmatrix}$

$$= \left[\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}5\\4\\1\end{pmatrix}\right]\frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}5\\4\\1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{13}{42}\begin{pmatrix}5\\4\\1\end{pmatrix}$$