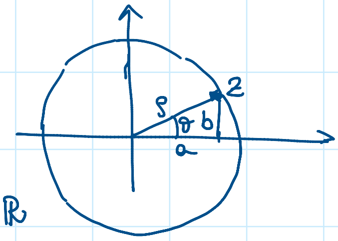
Appello3

Friday, 16 June 2023 11:18

Esercizio 1 **Risolvere** $|z| = i - 4z$



Cerchiamo

$z = a + ib \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2+b^2} \quad a, b \in \mathbb{R}$

tale che (sostituendo nell'equazione)

$\sqrt{a^2+b^2} = i - 4a - 4ib$

$\underbrace{\sqrt{a^2+b^2} + 4a}_{\mathrm{Re}} + i\underbrace{(4b-1)}_{\mathrm{Im}} = 0$

sto imponendo l'uguaglianza a zero del numero complesso

$\tilde{z} = \tilde{a} + i\tilde{b}$ dove $\tilde{a} = \sqrt{a^2+b^2} + 4a$
$\tilde{b} = 4b - 1$

e $\tilde{z} = 0$ se $\begin{cases} \tilde{a} = 0 \\ \tilde{b} = 0 \end{cases}$

Da cui $\begin{cases} \sqrt{a^2+b^2} + 4a = 0 \\ 4b - 1 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} b = \frac{1}{4} \\ a^2 + \frac{1}{16} = 16a^2 \end{cases}$ $\begin{cases} b = \frac{1}{4} \\ a = \pm\frac{1}{\sqrt{240}} \end{cases}$ $\Rightarrow$ $z_1 = \frac{1}{\sqrt{240}} + i\frac{1}{4}$

$z_2 = -\frac{1}{\sqrt{240}} + i\frac{1}{4}$

controlliamo se sono entrambe ammissibili_

Ricordiamo che $|z| = i - 4z$

$|z| = \sqrt{\frac{1}{240} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{16}{240}} = \frac{4}{\sqrt{240}}$

$i - 4z = \cancel{i} - 4\left(-\frac{1}{\sqrt{240}} + \cancel{i\frac{1}{4}}\right) = \frac{4}{\sqrt{240}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{z = z_2 = -\frac{1}{\sqrt{240}} + \frac{1}{4}i}$

Esercizio 2

$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ 2b-a & -b \end{pmatrix} \text{ t.c. } a, b \in \mathbb{R} \right\}$

$Z = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & h \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ con $h \in \mathbb{R}$

a) Base e dimensione di W e Z

$W = < \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} >$

W ha dimensione 2 essendo i vettori delle coordinate delle due matrici generatrici linearmente indipendenti

Una base di W è appunto $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right\}$

Consideriamo i vettori di coordinate dei generatori di Z e controlliamo se sono L.I mettendoli come righe di una matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & -6 & 1 \\ 0 & h & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} = \text{III} - \text{I}]{\text{II} = \text{II} - \text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & 2 \\ 0 & h & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV} = \text{IV} - \frac{h}{2} 2]{\text{III} = \text{III} - 2\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3\left(1-\frac{h}{2}\right) & 1-\frac{h}{2} \end{pmatrix}$$

infatti $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

Analizziamo l'ultima riga

se $1 - \frac{h}{2} = 0$ ossia se $\underline{h = 2}$ allora $\underline{\dim Z = 2}$ e una sua base è

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

se $\underline{h \neq 0}$ allora $\underline{\dim Z = 3}$ e una sua base è ad esempio

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & h \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

b) Per $\underline{h=2}$ determinare una base e la dimensione di $W \cap Z$

$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad$ $Z = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$W \cap Z = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ infatti $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

e la dim $W \cap Z = 1$

c) Per $h = 2$ determinare una base e la dimensione di $W + Z$.

La somma è diretta?

$W + Z = \langle W \cup Z \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ e la dim $W+Z = 3$

no la somma non è diretta dato che $W \cap Z \neq \{\phi\}$

Esercizio 3

$$r_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$r_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

a) Equazione cartesiana

r_1 $\begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = \alpha \\ z = -2\alpha \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 + y \\ z = -2y \end{cases}$ r_2 $\begin{cases} x = \beta \\ y = -1 + \beta \\ z = 2 - \beta \end{cases}$ $\begin{cases} y = -1 + x \\ z = 2 - x \end{cases}$

$r_1: \begin{cases} x - y = 2 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$ $r_2: \begin{cases} -x + y = -1 \\ x + z = 2 \end{cases}$

a) Posizione reciproca delle rette

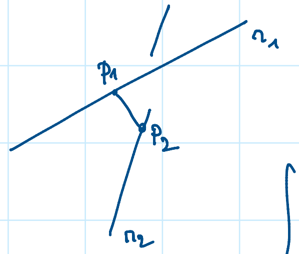
$V_{r_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $V_{r_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ non sono parallele

$$\begin{cases} 2+\alpha = \beta \\ \alpha = -1+\beta \\ -2\alpha = -\beta+2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = \beta-2 \\ \alpha = \beta-1 \\ \alpha = \frac{\beta}{2}-1 \end{cases}$$

non ha soluzione

Le due rette sono sghembe

b) Determinare la retta di minima distanza



La direzione ortogonale ad entrambe le rette sarà:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b-2c = 0 \\ a+b-c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c = 0 \\ a = -b \end{cases}$$

$$V_\perp = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ è la giacitura della retta di minima distanza.

Cerco $Q_1 \in r_1$ e $Q_2 \in r_2$ t.c. $\overrightarrow{Q_1-Q_2} \perp r_1$ e $\perp r_2$ (Q_1 e Q_2 sono i punti di minima distanza)

$$Q_1 = \begin{cases} x = \alpha+2 \\ y = \alpha \\ z = -2\alpha \end{cases} \qquad Q_2 = \begin{cases} x = \beta \\ y = -1+\beta \\ z = 2-\beta \end{cases} \qquad \overrightarrow{Q_1-Q_2} = \begin{pmatrix} \alpha-\beta+2 \\ \alpha-\beta+1 \\ -2\alpha+\beta-2 \end{pmatrix}$$

Impongo che $\overrightarrow{Q_1-Q_2}$ sia ortogonale ad r_1 ed r_2

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \alpha-\beta+2 \\ \alpha-\beta+1 \\ -2\alpha+\beta-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix} \alpha-\beta+2 \\ \alpha-\beta+1 \\ -2\alpha+\beta-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha-\beta+2+\alpha-\beta+1+4\alpha-2\beta+4 = 0 \\ \alpha-\beta+2+\alpha-\beta+1+2\alpha-\beta+2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -1/2 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

DISTANZA TRA LE DUE RETTE = NORMA DI $\overrightarrow{Q_1-Q_2}$

$$\overrightarrow{Q_1-Q_2} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}-1 \\ -1/2-0 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|\overrightarrow{Q_1-Q_2}\| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+0} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

La retta di minima distanza è quindi $r_\perp = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$\begin{cases} x = 1+\gamma \\ y = -\gamma \\ z = 1 \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} x = 1-y \\ z = 1 \end{cases}}$$ eq. cartesiane retta di minima distanza.