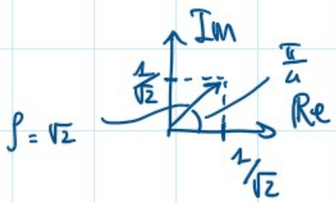
Appello1

Wednesday, 11 January 2023 17:37

ES1 Calcolare e disegnare le radici cubiche di $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

$z = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = 1\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$

calcolare $w = \sqrt[3]{z} = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ $\qquad z = w^3 = \rho^3(\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta)$

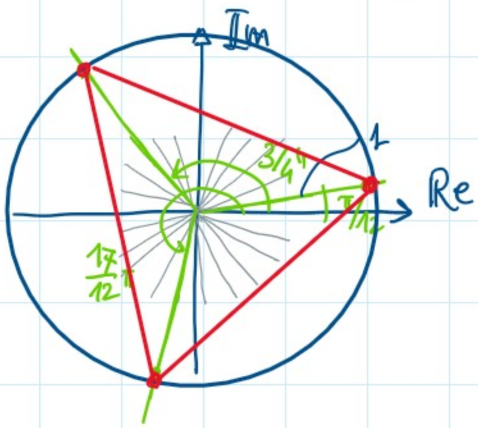


Da cui
$$\boxed{\begin{aligned} \rho^3 &= 1 \Rightarrow \rho = 1 \\ \theta &= \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3} \end{aligned}}$$

$k=0 \qquad w_0 = 1\left(\cos\frac{\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\right)$

$k=1 \qquad w_1 = 1\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i \operatorname{sen}\frac{3}{4}\pi\right)$

$k=2 \qquad w_2 = 1\left(\cos\frac{17}{12}\pi + i \operatorname{sen}\frac{17}{12}\pi\right)$



ES2 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$f(x,y,z) = (x, x-y, z)$

a) $A_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_3}(f) = ?$

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Da cui $A^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_3}(f)=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

b) Base e dimensione di ker f e Im f

- $\mathrm{Im}\, f = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$ I tre vettori sono L.I e quindi rappresentano una base per $\mathbb{R}^3$

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ é base dell'Im(f) (ma anche la base canonica lo sarebbe dato che $\boxed{\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^3}$) $\quad \dim(\mathrm{Im}(f))=3$

- $\ker f = \{0_V\}$

c) Dato $U=\left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x+y-z=0 \right\}$ determinare una base e la dimensione di $f(U)$

$U \subset \mathbb{R}^3 \quad \dim U = 2 \quad$ infatti $\quad U = \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$ e $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ é base di U

Calcolo le immagini dei vettori di una base di U

$$f\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$\mathrm{Im}(U) = f(U) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$ sono L.I e quindi rappresentano una base di Im

d) Stabilire se f é diagonalizzabile e determinare una base di autovettori

$$A(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad p_A(x) = \det(A - x\mathbb{I}) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 1 & -1-x & 0 \\ 0 & 0 & 1-x \end{pmatrix}$$

$$= (1-x)^2(-1-x)$$

$\lambda_0 = -1 \qquad ma(-1) = mg(-1) = 1$

$\lambda_1 = 1 \qquad ma(1) = 2$

calcolo gli autospazi

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } (A - 1\mathbb{I}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 2y \\ z \text{ libero} \end{array}$$

$$V_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } (A + 1\mathbb{I}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \\ y \text{ libero} \end{array}$$

Una base di autovettori è data da $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

ES 3

Si considerino le rette $r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $s : \begin{cases} -2x + z = 0 \\ -x + y = 5 \end{cases}$

a) Trovare le equazioni cartesiane di r e vettoriali di s e determinare la loro posizione reciproca

$r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \begin{array}{l} x = 1 + \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{array} \qquad \begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$

$s : \begin{cases} z - 2x = 0 \\ -x + y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} z = 2x \\ y = x + 5 \end{cases} \qquad s = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

$V_r \not\subseteq V_s$ e $V_s \not\subseteq V_r$ le rette non sono parallele

Verifico se sono incidenti ($rk(A|D)=3$) o sghembe ($rk(A|D)=4$)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & +2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$rk\ A = 3$ $\quad rk\ (A|b) = 4$ il sistema non ha soluzioni

rette sghembe

b) Determinare l'eq. cartesiana del piano parallelo alle due rette che contenga r

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right> \qquad \begin{cases} x = 1 + \alpha + \beta \\ y = \alpha + \beta \\ z = \alpha + 2\beta \end{cases} \qquad \boxed{x - y = 1}$$

c) Si consideri la giacitura V_π del piano calcolato al pto b _ V_π è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 ($V_\pi \subset \mathbb{R}^3$) Calcolare il suo complemento ortogonale

$$V_\pi^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ; \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

Sappiamo che il vettore dei coefficienti dell'equazione omogenea di π compie questi requisiti.

$$V_\pi^\perp = \left< \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right>$$

d) Calcolare una base ortonormale di V_π

$$V_\pi = \{ v_1, v_2 \} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{v_2 - (v_2 \cdot u_1)u_1}{\| v_2 - (v_2 \cdot u_1)u_1 \|} = \frac{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{\| \quad \|}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} - \frac{4}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{\| \quad \|} = \frac{\begin{pmatrix}-1/3\\-1/3\\2/3\end{pmatrix}}{\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\begin{pmatrix}-1/3\\-1/3\\2/3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

$\beta = \{u_1, u_2\}$ è una base ortonormale di V_π