FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ing. dell'Energia - Ing. Meccanica (Canale 3)

Docenti: C. Bertolin, A.Larese

IV appello 2022/23 Cognome e Nome: ____________________
Data: 11/09/2023
Tema: A Matricola: ____________________

- ***ESERCIZIO 1.*** Risolvere l'equazione $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$. (4 pti)

- ***SOLUZIONE 1.*** Poniamo $t = z^2$. Le soluzioni dell'equazione del secondo grado $t^2 + 2t + 4 = 0$ sono $t = -1 \pm \sqrt{3}i$. Dobbiamo trovare ore $z = \sqrt{t}$.

  Iniziamo con $\sqrt{-1-\sqrt{3}i}$: Poichè $-1-\sqrt{3}i$ ha modulo 2 e argomento $\frac{4\pi}{3}$ le sue radici quadrate hanno modulo $\sqrt{2}$ e argomenti $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} + \pi$. Esplicitamente

$$\sqrt{-1-\sqrt{3}i} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i\sqrt{3}).$$

  Proseguiamo con $\sqrt{-1+\sqrt{3}i}$: Poichè $-1+\sqrt{3}i$ ha modulo 2 e argomento $\frac{2\pi}{3}$ le sue radici quadrate hanno modulo $\sqrt{2}$ e argomenti $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + \pi$. Esplicitamente

$$\sqrt{-1+\sqrt{3}i} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i\sqrt{3}).$$

- ***ESERCIZIO 2.*** Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare determinata dalla seguente matrice, rispetto alle basi canoniche ε_3 di $\mathbb{R}_3$ e ε_2 di $\mathbb{R}^2$:

$$M^{\varepsilon_2}_{\varepsilon_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

  Si determini:

  (a) Una base e la dimensione di $\ker(f)$ e $\mathrm{im}(f)$. (2 pti)

  (b) La controimmagine $f^{-1}(w)$, dove $w = (1, 0)$. (2 pti)

  (c) L'intersezione tra i due sottoinsiemi $\ker(f) \bigcap f^{-1}(w)$. (2 pti)

- ***SOLUZIONE 2.***

(a) $\ker(f)$ è generato da $e_1 + e_2 - e_3$, $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}^2$.

(b) La controimmagine è generata da $e_1 - e_2$ e dal Ker.

(c) L'intersezione è il vettore nullo.

- ***ESERCIZIO 3.*** Siano $v_1 := (1, 1, 0)$, $v_2 := (1, 0, 1)$ vettori in $\mathbb{R}^3$ e sia $U :=< v_1, v_2 >$ il sottospazio da essi generato.

  (a) Determinare il sottospazio $U^\perp$ complemento ortogonale di U, ed una sua base. (2 pti)

  (b) Si determini un sottospazio W non banale, che sia complementare ad U, ma non ortogonale, ed una sua base. (2 pti)

  (c) Determinare la proiezione del vettore $v := (1, 1, 1)$ su $U^\perp$. (2 pti)

  (d) A partire dall'insieme di vettori $\{v_1, v_2, v_1 \times v_2\}$, ottenere una base ortonormale. (2 pti)

- ***SOLUZIONE 3.***

  (a) $U^\perp$ è generato da $v_1 \times v_2 = (1, -1, -1)$.

  (b) Possiamo scegliere, per esempio, W generato da $v_1 + v_1 \times v_2$.

  (c) La proiezione richiesta è $\frac{-1}{3}(1, -1, -1)$.

  (d) Applicando il procedimento di Gram-Schmidt ai vettori $\{v_1, v_2, v_1 \times v_2\}$ troviamo $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2)$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1)$.

- ***TEORIA***

  (a) Enunciare e dimostrare la disuguaglianza triangolare. (3 pti)

  (b) Dimostrare che matrici simili hanno lo stesso determinante (3 pti)

REGOLE D'ESAME:

- **Compilare ogni foglio in ogni sua parte** (nome, cognome, matricola, corso di laurea, tema del compito, etc.). Non verranno corretti fogli senza questi dati.
- **Consegnare questo foglio e solo i fogli protocollo di BELLA COPIA.**
- **NON consegnare fogli di brutta copia**.
- **Verrà valutato solo quanto scritto a penna**.

- È possibile **ritirarsi** dalla prova in qualsiasi momento: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio del testo d'esame e sui fogli di bella copia.
- **Risaltare in maniera evidente il numero dell'esercizio che si sta svolgendo**.
- NON è consentito uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- NON è consentito l'uso di libri, appunti, telefoni, smartwatch e calcolatrici di ogni tipo.
- NON è consentito comunicare con altri candidati durante la prova.