FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ing. dell'Energia - Ing. Meccanica (Canale 3)

Docenti: C. Bertolin, A.Larese

III appello 2022/23 Cognome e Nome: ______________________
Data: 19/06/2023
Tema: A Matricola: ______________________

- ***ESERCIZIO 1.*** Risolvere l'equazione $|z| = i - 4z$. (4 pti)

- ***SOLUZIONE 1.*** Poniamo $z = a + ib$ e riscriviamo l'equazione iniziale

$$\sqrt{a^2+b^2} = i - 4(a+ib) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a^2+b^2} + 4a + i(4b-1) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{a^2+b^2} + 4a = 0 \\ 4b - 1 = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione risulta $a \leq 0$ mentre dalla seconda risulta $b = \frac{1}{4}$. Dunque

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 + (\frac{1}{4})^2} = -4a \\ b = \frac{1}{4} \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} a^2 + \frac{1}{16} = 16a^2 \\ b = \frac{1}{4} \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} 15a^2 = \frac{1}{16} \\ b = \frac{1}{4} \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{1}{240} \\ b = \frac{1}{4} \end{cases}$$

L'equazione iniziale ammette come unica soluzione $z = -\frac{1}{\sqrt{240}} + \frac{1}{4}i$.

- ***ESERCIZIO 2.*** Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale $\mathbb{M}_{2,2}$ delle matrici di ordine 2 a coefficienti reali:

$$\mathcal{W} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ 2b-a & -b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{Z} = < \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & h \\ -3 & 1 \end{pmatrix} >$$

con $h \in \mathbb{R}$

(a) Calcolare una base e la dimensione dei sottospazi vettoriali $\mathcal{W}$ e $\mathcal{Z}$. (2 pti)

(b) Per $h = 2$ determinare una base e la dimensione del sottospazio vettoriale $\mathcal{W} \cap \mathcal{Z}$ (2 pti)

(c) Per $h = 2$ determinare una base e la dimensione del sottospazio vettoriale e $\mathcal{W}+\mathcal{Z}$ e stabilire se la somma $\mathcal{W}+\mathcal{Z}$ è diretta. (2 pti)

- ***SOLUZIONE 2.***

(a) Una base di $\mathcal{W}$ è $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ e dunque $\dim(\mathcal{W}) = 2$.

Per $h = 2$ una base di $\mathcal{Z}$ è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ e dunque $\dim(\mathcal{Z}) = 2$.

Per $h \neq 2$ una base di $\mathcal{Z}$ è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & h-2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ e dunque $\dim(\mathcal{Z}) = 3$.

(b) Una base di $\mathcal{W} \cap \mathcal{Z}$ è $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ e dunque $\dim(\mathcal{W} \cap \mathcal{Z}) = 1$.

(c) Una base di $\mathcal{W}+\mathcal{Z}$ è $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ e dunque $\dim(\mathcal{W}+\mathcal{Z}) = 3$. La somma non è diretta essendo l'intersezione dei due sottospazi non nulla.

- ***ESERCIZIO 3.*** Nello spazio euclideo tridimensionale, si considerino le rette

$$r_1 = (2,0,0) + < (1,1,-2) > \qquad r_2 = (0,-1,2) + < (1,1,-1) >$$

(a) Determinare le equazioni cartesiane delle due rette. (2 pti)

(b) Determinare la posizione reciproca di queste due rette. (2 pti)

(c) Determinare la retta di minima distanza tra r_1 e r_2. (2 pti)

(d) Calcolare la distanza tra r_1 e r_2. (2 pti)

- ***SOLUZIONE 3.***

(a)

(b) Le rette sono sghembe poichè non sono complanari e non hanno nessun punto in comune.

(c) $r : (1,0,1) + < (-1,1,0) >$.

(d) $d(r_1, r_2) = \sqrt{1/2}$.

- ***TEORIA***

   (a) Enunciare e dimostrare il teorema di diagonalizzabilità di un endomorfismo. (3 pti)

   (b) Criterio di iniettività di un applicazione lineare. (3 pti)

REGOLE D'ESAME:

- **Compilare ogni foglio in ogni sua parte** (nome, cognome, matricola, corso di laurea, tema del compito, etc.). Non verranno corretti fogli senza questi dati.
- **Consegnare questo foglio e solo i fogli protocollo di BELLA COPIA.**
- **NON consegnare fogli di brutta copia**.
- **Verrà valutato solo quanto scritto a penna**.
- È possibile **ritirarsi** dalla prova in qualsiasi momento: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio del testo d'esame e sui fogli di bella copia.
- **Risaltare in maniera evidente il numero dell'esercizio che si sta svolgendo**.
- NON è consentito uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- NON è consentito l'uso di libri, appunti, telefoni, smartwatch e calcolatrici di ogni tipo.
- NON è consentito comunicare con altri candidati durante la prova.