

# FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ing. dell'Energia - Ing. Meccanica (Canale 3)

Docenti: C. Bertolin, A. Larese

II appello 2022/23

Cognome e Nome: \_\_\_\_\_

Data: 14/02/2023

Tema: A

Matricola: \_\_\_\_\_

---

- **ESERCIZIO 1.** Risolvere l'equazione  $z^2 = \overline{z^2}$  (2 pts)

- **SOLUZIONE 1.** Poniamo  $z = x + iy$  e riscriviamo l'equazione iniziale

$$\begin{aligned}(x + iy)^2 &= \overline{(x + iy)^2} \Rightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = \overline{x^2 - y^2 + 2ixy} \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 - y^2 + 2ixy &= x^2 - y^2 - 2ixy \Rightarrow 4ixy = 0 \Rightarrow xy = 0\end{aligned}$$

Dunque otteniamo  $x = 0$  oppure  $y = 0$ . Le soluzioni dell'equazione iniziale sono i numeri reali e i numeri immaginari puri.

- **ESERCIZIO 2.** Si consideri l'applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  seguente:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) := (x_1 + x_4, x_3, -x_2, x_1 + x_4).$$

- (a) Determinare la matrice  $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^4$  e la matrice  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$  rispetto alla base  $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ . (2 pts)
- (b) Dire se  $f$  è iniettiva e/o suriettiva. Giustificare la risposta. (2 pts)
- (c) Calcolare  $f^{-1}(\mathbf{z})$  con  $\mathbf{z} = (2, 0, 0, 2)$ . Dire se  $f^{-1}(\mathbf{z})$  è un sottospazio vettoriale del dominio. (2 pts)
- (d) Calcolare gli autovalori di  $f$  e i rispettivi autospazi. Dire se l'applicazione  $f$  è diagonalizzabile. Giustificare la risposta. (2 pts)

- **SOLUZIONE 2.**

1.

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Il Ker è generato da  $e_1 - e_4$ . Dunque  $f$  non è iniettiva. Essendo un endomorfismo, non è neanche suriettiva.

3.  $f^{-1}(\mathbf{z}) = (1, 0, 0, 1) + \ker(f)$ . Non è un sottospazio vettoriale del dominio.
4. L'autovalore 0 corrisponde al Ker mentre l'autovalore 2 ha come autovettore  $e_1 + e_4$ . Non è diagonalizzabile poichè ammette autovalori complessi : il polinomio caratteristico di  $f$  è  $p_f(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)(\lambda^2 + 1) = \lambda(\lambda - 2)(\lambda + i)(\lambda - i)$ .

• **ESERCIZIO 3.**

Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino i punti  $A = (0, -1, 1)$ ,  $B = (-1, 0, 2)$ ,  $C = (1, -1, -4)$ .

- (a) Si determini l'equazione cartesiana del piano  $\pi$  passante per i tre punti. (2 pts)
- (b) Si determini la retta  $r$  passante per A e per il punto medio M del segmento BC. (2 pts)
- (c) Si determini l'equazione cartesiana della retta  $s$  passante per A, contenuta in  $\pi$  e ortogonale alla retta  $r$ . (2 pts)
- (d) Sia  $Q$  la proiezione ortogonale di  $P = (1, 1, 1)$  su  $\pi$ . Si determini il vettore  $P - Q = \vec{QP}$ . (2 pts)

• **SOLUZIONE 3.**

- (a)  $\pi : 5x + 4y + z + 3 = 0$
- (b)  $r : \begin{cases} x = 0 \\ 4y + z + 3 = 0 \end{cases}$
- (c)  $s : \begin{cases} 20x + 17y + 17 = 0 \\ 5x + 17z - 17 = 0 \end{cases}$
- (d)  $P - Q = 13/42(5, 4, 1)$

• **TEORIA**

- (a) Enunciare e dimostrare la formula di Grassmann nel caso in cui i due sottospazi abbiano intersezione non nulla. (3 pts)
- (b) Dimostrare che l'ortogonale di un sottospazio vettoriale è un sottospazio vettoriale. (3 pts)

---

**REGOLE D'ESAME:**

- **Compilare ogni foglio in ogni sua parte** (nome, cognome, matricola, corso di laurea, tema del compito, etc.). Non verranno corretti fogli senza questi dati.

- **Consegnare questo foglio e solo i fogli protocollo di BELLA COPIA.**
- **NON consegnare fogli di brutta copia.**
- **Verrà valutato solo quanto scritto a penna.**
- È possibile **ritirarsi** dalla prova in qualsiasi momento: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio del testo d'esame e sui fogli di bella copia.
- **Risaltare in maniera evidente il numero dell'esercizio che si sta svolgendo.**
- NON è consentito uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- NON è consentito l'uso di libri, appunti, telefoni, smartwatch e calcolatrici di ogni tipo.
- NON è consentito comunicare con altri candidati durante la prova.