FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ing. dell'Energia - Ing. Meccanica (Canale 3)

Docenti: C. Bertolin, A.Larese

I appello 2022/23
Data: 23/01/2023
Tema: A

Cognome e Nome: ______________________

Matricola: ______________________

- ***ESERCIZIO 1.*** Calcolare le radici cubiche di $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$. (2 pti)
- ***SOLUZIONE 1.*** Poichè z ha modulo 1 e argomento $\frac{\pi}{4}$ le sue radici cubiche hanno modulo 1 e argomenti $\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}$ per $k = 0,1,2$. Esplicitamente le radici cubiche di z sono

$$w_k = \left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)\right] \qquad \text{per } k = 0,1,2.$$

- ***ESERCIZIO 2.*** Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$f(x,y,z) = (x, x-y, z).$$

(a) Scrivere la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche del dominio e del codominio. (1 pti)

(b) Determinare una base e la dimensione sia di $\ker(f)$ che di $\operatorname{im}(f)$. (2 pti)

(c) Dato il sottospazio vettoriale

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x+y-z=0 \right\}$$

determinare una base e la dimensione di $f(U)$. (2 pti)

(d) Stabilire se f è diagonalizzabile e nel caso affermativo determinare una base di autovettori. (3 pti)

- ***SOLUZIONE 2.***

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $\ker(f) = \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}$ e $\operatorname{im}(f) = \mathbb{R}^3$. Di conseguenza $\dim \ker(f) = 0$ e $\dim \operatorname{im}(f) = 3$ e come base di $\operatorname{im}(f)$ si può prendere la base canonica.
3. Si ha $U = \langle (1, 0, 1), (0, 1, 1) \rangle$, da cui $f(U) = \langle (1, 1, 1), (0, -1, 1) \rangle$. In particolare $\dim f(U) = 2$.
4. f è diagonalizzabile ed una base di autovettori è $\{(0, 1, 0), (0, 0, 1), (2, 1, 0)\}$.

- ***ESERCIZIO 3.*** Nello spazio euclideo $\mathbb{A}^3$, si considerino le rette

$$r : (1, 0, 0) + < (1, 1, 1) > \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} -2x + z = 0 \\ -x + y = 5 \end{cases} .$$

(a) Trovare le equazioni cartesiane di r e vettoriali di s e determinare la loro posizione reciproca. (2 pti)

(b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π parallelo alle due rette e che contenga la retta r. (2 pti)

(c) Si consideri la giacitura V_π del piano calcolato al punto b). V_π è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 ($V_\pi \subset \mathbb{R}^3$). Calcolare il suo complemento ortogonale. (2 pti)

(d) Calcolare una base ortonormale di V_π e rappresentare graficamente il processo di ortonormalizzazione di una base di V_π. (2 pti)

- ***SOLUZIONE 3.***

(a) $r : \begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$ e $s : (0, 5, 0) + < (1, 1, 2) >$. Le rette sono sghembe dato che $\operatorname{rk}(A) < \operatorname{rk}(A|D)$;

(b) $\pi : x - y = 1$; $V_\pi =< (1, 1, 1), (1, 1, 2) >$

(c) $V_\pi^\perp =< (1, -1, 0) >$

(d) $\mathcal{B} = \{1/\sqrt{3}(1, 1, 1), 1/\sqrt{6}(-1, -1, 2)\}$

- ***TEORIA***

(a) Enunciare e verificare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. (3 pti)

(b) Dimostrare che l'intersezione di due sottospazi di uno stesso spazio vettoriale è un sottospazio vettoriale (3 pti)

REGOLE D'ESAME:

- **Compilare ogni foglio in ogni sua parte** (nome, cognome, matricola, corso di laurea, tema del compito, etc.). Non verranno corretti fogli senza questi dati.
- **Consegnare questo foglio e solo i fogli protocollo di BELLA COPIA.**
- **NON consegnare fogli di brutta copia**.
- **Verrà valutato solo quanto scritto a penna**.
- È possibile **ritirarsi** dalla prova in qualsiasi momento: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio del testo d'esame e sui fogli di bella copia.
- **Risaltare in maniera evidente il numero dell'esercizio che si sta svolgendo**.
- NON è consentito uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- NON è consentito l'uso di libri, appunti, telefoni, smartwatch e calcolatrici di ogni tipo.
- NON è consentito comunicare con altri candidati durante la prova.