Lezione 6 TJ FALG

Argomenti di oggi:

↦ applicazioni lineari

↦ simulazione esame

→ rivedere Tutorato 6 22-23 per note su surj, inj, ...

Esercizio 2 1° appello 22/23

Si consideri l'endomorfismo

$f: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x-y \\ z \end{pmatrix}$

a) determinare $A^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$, $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$A^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = \left(f(e_1)_{\mathcal{E}}, f(e_2)_{\mathcal{E}}, f(e_3)_{\mathcal{E}} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) determinare base e dim di $\ker(f)$

$\ker(f) = \{ v \in \mathbb{R}^3 : f(v) = \emptyset_{\mathbb{R}^3} \} = \{ v_{\mathcal{E}} \in \mathbb{R}^3 : A^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) \cdot v = O_{\mathbb{R}^3} \}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ · soluzione con elm di Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \emptyset \\ 1 & -1 & 0 & \emptyset \\ 0 & 0 & 1 & \emptyset \end{array} \right) \begin{array}{l} \mapsto I \\ \mapsto II - I \\ \mapsto III \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right), \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\ker(f) = O_v$

c) dato il sottospazio vettoriale

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x+y-z = \emptyset \right\}$$

determinare base e dimensione di $f(U)$

↦ note sullo svolgimento

a) determinare una base di U;

immaginiamo $\mathcal{B}_U = \{ v_{U_1}, v_{U_2}, \dots, v_{U_n} \}$ sia base di U

b) $\{ f(v_{U_1}), f(v_{U_2}), \dots, f(v_{U_n}) \}$ é sist. generatore di $f(U)$

c) si determina una base di $f(U)$ dal sistema generatore

a) dall'equazione cartesiana si ricava una relazione tra x, y e z:

$z = x+y$

quindi il generico numero di U si puó scrivere come:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix} = \underbrace{x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

↓

da cui si deduce che il generico elemento di U si puó scrivere come comb. lineare dei due vettori $(1,0,1)$ e $(0,1,1)$, da cui

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ é base di U

b) $f(v_{1\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(v_{2\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto f(U) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

c) i due vettori sono LI, pertanto é anche una base vettoriale

---

Risposte a domande ricevute via email:

1) determinare intersezione dei sottospazi vettoriali U e W, dove

$$U = \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y-z = \emptyset \} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \\ t \end{pmatrix}$$

$z = x+y$

$y = -1/2\, x$

$$W = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} x+2y = \emptyset \\ x-2z-t = \emptyset \end{array} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} x \\ -x/2 \\ z \\ x-2z \end{pmatrix}$$

$t = x-2z$

Affinché $v \in U \cap W$, v deve appartenere contemporaneamente a U e W, cioé $v \in U$ e $v \in W$ contemporaneamente! Ovvero: quali comb lin rispettano la seguente?

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

da cui si deduce che

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle - \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tutte le combinazioni che rispettano questa condizione ~~sono nello~~ appartengono allo spazio $U \cap W$. Cioé

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \underbrace{- \gamma_1} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \underbrace{- \gamma_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

↓

cambio nome ai due scalari e li chiamo $+\lambda_4$ e $+\lambda_5$ e riscrivo in forma di matri

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

↓

Si tratta di un sistema lineare nella forma $Ax = b = 0$, procedo con eliminazione di Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \emptyset & \emptyset & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mapsto I \\ \mapsto II \\ \mapsto III - I \\ \mapsto IV \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mapsto I \\ \mapsto II \\ \mapsto III - II \\ \mapsto IV \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \emptyset \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ \emptyset & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da cui si deduce:

$\lambda_4 = \lambda_5$, λ_5 qualsiasi

$\lambda_3 + \cancel{2\lambda_4} - \cancel{2\lambda_5} = \emptyset \mapsto \lambda_3 = \emptyset$

$\lambda_2 - \lambda_4 = \emptyset \mapsto \lambda_2 = +\lambda_5$

$\lambda_1 + 2\lambda_4 = \emptyset \mapsto \lambda_1 = -2\lambda_5$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \underbrace{- \gamma_1} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \underbrace{- \gamma_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{NB: } \lambda_4 = -\gamma_1, \ \lambda_5 = -\gamma_2}$

λ_5 ~~variabile libera~~ quals.

da cui si deduce che

$$U \cap W = -2\lambda_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cancel{\emptyset \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = -\lambda_5 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \lambda_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_5 \begin{pmatrix} -2 \\ +1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U \cap W = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$